5.10 Ausgleichsprobleme

Ausgleichsgerade

lineare Approximation von Daten (t_k, f_k) durch Minimierung der Fehlerquadratsumme

$$\sum_{k=1}^{n} (f_k - p(t_k))^2, \quad p(t) = u + vt$$

eindeutig lösbar bei mindestens zwei verschiedenen Abszissen t_i

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}, \quad v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

Normalengleichungen

$$|Ax - b| \to \min \quad \Leftrightarrow \quad A^{\mathrm{t}} A x = A^{\mathrm{t}} b$$

eindeutige Lösung x, falls die Spalten von A linear unabhängig sind

Singulärwert-Zerlegung

$$U^* A V = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}, \quad s_1 \geq \cdots \geq s_k > s_{k+1} = \cdots = 0$$

mit $k = \operatorname{Rang} A$

singuläre Werte s_j: Wurzeln der Eigenwerte von $A^* A$

Spalten u_j von U und v_j von V: orthonormale Basen aus Eigenvektoren von AA^* bzw. $A^* A$

$$A v_j = s_j u_j, \quad Ax = \sum_{i=1}^{k} s_i (v_i^* x) u_i$$

Pseudo-Inverse

$$A^+ = V S^+ U^*, \quad S^+ = \operatorname{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_k, 0, \ldots, 0)$$

mit $s_i > 0$ den Singulärwerten von A

$x = A^+ b$: Minimum-Norm-Lösung des Ausgleichsproblems $|Ax - b| \to \min$