Teil 5

Lineare Algebra

5.1 Gruppen und Körper

Gruppe

Menge G mit binärer Operation $\diamond : G \times G \longmapsto G$

- Assoziativität: $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$
- Neutrales Element: $\exists!\, e \in G$: $e \diamond a = a \diamond e = a$
- Inverses Element: $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$

kommutativ oder abelsch $\quad\Leftrightarrow\quad a \diamond b = b \diamond a$

Untergruppe

Teilmenge U einer Gruppe G

abgeschlossen unter der Gruppenoperation von G, d.h.

$$a, b \in U \quad\Longrightarrow\quad a \diamond b \in U, \qquad a \in U \quad\Longrightarrow\quad a^{-1} \in U$$

Permutationen und symmetrische Gruppe

Gruppe S_n der Bijektionen auf $\{1, 2, \ldots, n\}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

$n!$ Elemente

Zyklenschreibweise von Permutationen

Zyklus: Bilder eines Elementes bei mehrfacher Ausführung der Permutation

$\rightsquigarrow$ Zerlegung von $\pi \in S_n$, z.B.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\,4\,6)\ (2\,3)\ (5) \quad \text{bzw.} \quad \pi = (1\,4\,6)\ (2\,3)$$

Transposition und Signum einer Permutation

$\tau = (j\,k)$: Vertauschung von j und k

$\rightsquigarrow$ Produktdarstellung von Permutationen

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m$$

Vorzeichen (Signum) einer Permutation: $\sigma(\pi) = (-1)^m$

Körper

Menge K, auf der eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ definiert sind

- $(K, +)$: abelsche Gruppe mit neutralem Element 0

$$\begin{aligned} a+b &= b+a \\ (a+b)+c &= a+(b+c) \\ a+0 &= a \\ a+(-a) &= 0 \end{aligned}$$

- $(K\backslash\{0\}, \cdot)$: abelsche Gruppe mit neutralem Element 1

$$\begin{aligned} a\cdot b &= b\cdot a \\ (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) \\ a\cdot 1 &= a \\ a\cdot a^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

- Distributivgesetz: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

Primkörper

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}, \quad p: \text{ Primzahl}$$

Körper unter Addition und Multiplikation modulo p

Chinesischer Restsatz

Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &= a_1 \bmod p_1 \\ &\ldots \\ x &= a_n \bmod p_n \end{aligned}$$

eindeutige Lösung $x \in \{0, \ldots, P-1\}$, $P = p_1 \cdots p_n$, für teilerfremde Zahlen $p_1, \ldots, p_n$

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k Q_k (P/p_k) \bmod P, \quad Q_k(P/p_k) = 1 \bmod p_k$$

5.2 Vektorräume

Vektorraum

abelsche Gruppe $(V, +)$, auf der eine Skalarmultiplikation $\cdot$ mit Elementen aus einem Körper K mit den folgenden Eigenschaften definiert ist

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v &= \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v \\
\lambda \cdot (v_1 + v_2) &= \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 \\
(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v &= \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) \\
1 \cdot v &= v
\end{aligned}$$

Vektorraum der n-Tupel

$$K^n: \; a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}}, \quad a_i \in K$$

komponentenweise definierte Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$): n-Tupel reeller (komplexer) Zahlen

Unterraum

Teilmenge U eines K-Vektorraums V, die bzgl. der Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist:

$$\begin{aligned}
u, v \in U &\implies u + v \in U \\
\lambda \in K, u \in U &\implies \lambda \cdot u \in U
\end{aligned}$$

Linearkombination

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

lineare Hülle $\mathrm{span}(U)$: Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus U

Konvexkombination

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m, \quad \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$$

konvexe Hülle $\text{conv}(U)$: Menge aller Konvexkombinationen von Vektoren aus U

Lineare Unabhängigkeit

linear unabhängig:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \quad \implies \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

linear abhängig:

$$\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 : \ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

(nicht-triviale Darstellung des Nullvektors)

Basis

$B = \{b_1, b_2, \ldots\} \subset V$ Basis $\Leftrightarrow$
eindeutige Darstellbarkeit der Vektoren v des Vektorraums V als Linearkombination

$$v = \sum_k \lambda_k b_k$$

$\Leftrightarrow$ b_k linear unabhängig und $\text{span}(b_1, b_2, \ldots) = V$

Dimension: $\dim V = |B|$

5.3 Skalarprodukt und Norm

Reelles Skalarprodukt

Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum V mit folgenden Eigenschaften

- Positivität:
$$\langle v, v\rangle > 0 \text{ für } v \neq 0$$
- Symmetrie:
$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$
- Linearität:
$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

Komplexes Skalarprodukt

Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ auf einem komplexen Vektorraum V mit folgenden Eigenschaften

- Positivität:
$$\langle v, v\rangle > 0 \text{ für } v \neq 0$$
- Schiefsymmetrie:
$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$
- Linearität:
$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

Euklidisches Skalarprodukt

$$y^* x = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$$

assoziierte Norm

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w, w\rangle}$$

Gleichheit genau dann wenn $u \parallel v$

bei reellem Skalarprodukt Definition eines Winkels $\alpha \in [0, \pi]$ via

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}$$

Norm

Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften

- Positivität:
$$\|v\| > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0$$
- Homogenität:
$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$
- Dreiecksungleichung:
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Norm, assoziiert mit einem Skalarprodukt

$$|u| = \sqrt{\langle u, v \rangle}$$

Orthogonale Basis

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j$$

orthonormal, falls $|u_k| = 1$

eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \,, \quad c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{|u_k|^2}$$

Norm: $|v|^2 = |c_1|^2 |u_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 |u_n|^2$

Orthogonale Projektion

Abbildung auf einen Unterraum U eines Vektorraums V

$$v \mapsto P_U(v) \in U \subset V, \qquad \langle v - P_U(v), u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

$u_1, \ldots, u_k$ orthogonale Basis von $U \implies$

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$$

Verfahren von Gram-Schmidt

induktive Orthogonalisierung einer Basis $b_1, \ldots, b_n$

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k, \quad j = 1, \ldots, n$$

$|\langle u_k, u_k \rangle| = 1$ bei Normierung, $u_j \leftarrow u_j / |u_j|$, nach jedem Schritt

5.4 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung

Abbildung $L : V \to W$ zwischen Vektorräumen

- additiv:
  $L(u+v) = L(u) + L(v)$
- homogen:
  $L(\lambda v) = \lambda L(v)$

insbesondere: $L(0_V) = 0_W$, $L(-v) = -L(v)$

Komposition linearer Abbildungen

Hintereinanderausführung linearer Abbildungen $S : U \to V$, $T : V \to W$
$\rightsquigarrow$ lineare Abbildung

$$T \circ S : U \to W, \quad (T \circ S)(u) = T(S(u))$$

Matrix

Rechteckschema mit m Zeilen und n Spalten

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

komponentenweise Definition von Operationen

$$C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \qquad B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Matrix einer linearen Abbildung

lineare Abbildung $L : V \longmapsto W$ zwischen Vektorräumen mit Basen $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ und $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ eindeutig bestimmt durch die Bilder der Basisvektoren

$$L(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{m,j} f_m$$

$\rightsquigarrow$ lineare Abbildung der Koordinaten

$$w_F = A v_E \quad \Leftrightarrow \quad w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j, \quad i = 1, \ldots, m$$

Affine Abbildung

affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$f(x) = Ax + v$$

v: Bild des Nullvektors
A: $m \times n$-Matrix mit Spalten $a_{1:m,k} = f(e_k) - v$

Basiswechsel

Transformation der Koordinaten bei einem Basiswechsel $E \to E'$

$$v_{E'} = Av_E, \quad e_k = \sum_j a_{jk} e'_j$$

Bild und Kern

lineare Abbildung $L : V \to W$

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern} L &= \{v \in V : \ L(v) = 0\} \ \subseteq V \\ \operatorname{Bild} L &= \{w \in W : \ \exists v \in V \ \text{mit} \ L(v) = w\} \ \subseteq W \end{aligned}$$

$\dim V < \infty \implies$

$$\dim V = \dim \operatorname{Kern}(L) + \dim \operatorname{Bild}(L)$$

Inverse Abbildung

$L : V \to W$ injektiv $\quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Kern} L = 0_V$

$\rightsquigarrow$ lineare Umkehrabbildung

$$w \mapsto v, \quad w = L(v)$$

5.5 Matrizrechnung

Matrix-Multiplikation

$A : m \times n$, $B : n \times \ell \rightsquigarrow C : m \times \ell$

$$C = AB, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \quad 1 \le i \le m,\, 1 \le k \le \ell$$

Komposition der linearen Abbildungen $u \mapsto v = Bu$, $v \mapsto w = Av$

i.a. nicht kommutativ

Inverse Matrix

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Invertierung von Matrixprodukten: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Transponierte, adjungierte, symmetrische und hermitesche Matrix

transponierte Matrix

$$B = A^{\mathrm{t}} \quad \Leftrightarrow \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

symmetrisch: $A = A^t$

adjungierte Matrix

$$C = A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}} \quad \Leftrightarrow \quad c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$$

selbst-adjungiert oder Hermitesch: $A = A^*$

Regeln

$$\begin{aligned} (AB)^{\mathrm{t}} &= B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} \quad \text{und} \quad (AB)^* = B^*A^*\,, \\ (A^{\mathrm{t}})^{-1} &= (A^{-1})^{\mathrm{t}} \quad \text{und} \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \end{aligned}$$

Spur einer Matrix

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

Regeln

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA), \quad \mathrm{Spur}(T^{-1}AT) = \mathrm{Spur}(A)$$

Rang einer Matrix

maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten bzw. Zeilen

Matrix-Norm

zugeordnet

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

submultiplikativ, d.h. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

euklische Norm

$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \ A^*Av = \lambda v\}$$

Zeilensummennorm

$$\|A\|_\infty = \max_j \sum_k |a_{jk}|$$

Orthogonale und unitäre Matrix

unitär: Spalten bilden orthonormale Basis

$$A^{-1} = \overline{A}^{\mathrm{t}} = A^*$$

orthogonal: Spezialfall reeller Matrizen, $A^{-1} = A^{\mathrm{t}}$

Invarianz der euklidischen Norm: $|Av| = |v|$

Normale Matrizen

$$A \text{ normal} \quad \Leftrightarrow \quad AA^* = A^*A, \quad A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}}$$

bzw. $AA^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}}A$ für reelles A

unitär, hermitesch, orthogonal oder symmetrisch $\implies$ normal

Zyklische Matrizen

generiert durch zyklisches Verschieben der ersten Spalte

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

zyklische Struktur kompatibel mit Matrixmultiplikation

Positiv definite Matrix

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0$$

positive Diagonalelemente und Eigenwerte, positiv definite Inverse

semidefinit, falls $v^*Av \geq 0$

5.6 Determinanten

Determinante

Schreibweisen

$$\det A = \det(a_1, \ldots, a_n) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mit a_k den Spalten von A

definierende Eigenschaften

- Multilineariät:
$$\det(\ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots) = \alpha \det(\ldots, a_j, \ldots) + \beta \det(\ldots, b_j, \ldots)$$
- Antisymmetrie:
$$\det(\ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots) = -\det(\ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots)$$
- Normierung:
$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1\,, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}$$
für die Einheitsvektoren e_k

Entwicklung als Summe n-facher Produkte

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i)\, a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}$$

mit $\sigma(i)$ dem Vorzeichen der Permutation $(i_1, \ldots, i_n)$

Determinante als Volumen

Volumen des von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannten Spats

$$|\det A| = \operatorname{vol}\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i :\ 0 \le \alpha_i \le 1 \right\} = \operatorname{vol}\left(A[0,1]^n\right)$$

Determinanten spezieller Matrizen

- Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$ für $i < j$ oder $i > j \implies$
$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$$
- Blockdiagonalmatrix: Blockstruktur mit $A_{ij} = 0$, $i \neq j$, und quadratischen Diagonalblöcken $A_{ii} \implies$
$$\det A = \prod_{i=1}^{k} \det A_{ii}$$

- Orthogonale und unitäre Matrizen:
$$|\det U| = 1$$

Eigenschaften von Determinanten

$\det A$

- invariant bei Addition eines Vielfachen einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile)
- null bei zwei gleichen Spalten (Zeilen)
- Vorzeichenänderung bei Vertauschung von Spalten (Zeilen)

$\rightsquigarrow$ sukzessive Transformation auf Dreiecksform

Regeln
$$\mathrm{detA} = \mathrm{detA}^{\mathrm{t}}, \quad \mathrm{det}(\mathrm{A}^{-1}) = (\mathrm{detA})^{-1}, \quad \mathrm{det}(\mathrm{AB}) = (\mathrm{detA})(\mathrm{detB})$$

Entwicklungssatz für Determinanten

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det \tilde{A}_{kj} \quad \text{(Entwicklung nach Zeile } k\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \det \tilde{A}_{i\ell} \quad \text{(Entwicklung nach Spalte } l\text{)} \end{aligned}$$

mit $\tilde{A}_{ij}$ der Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile j-ten Spalte entsteht

5.7 Lineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

homogen (inhomogen): $b = 0$ ($b \neq 0$)

überbestimmt, falls unlösbar (im Allgemeinen für $m > n$)

unterbestimmt, falls keine eindeutige Lösung (im Allgemeinen für $m < n$)

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = a_1x_1 + \cdots a_nx_n = b \in \mathbb{R}^m$$

mit a_k den Spalten von A

(i) homogenenes System ($b = 0$):
immer lösbar, linearer Lösungsraum Kern A
eindeutige Lösung $x = 0$, falls a_k linear unabhängig

(ii) inhomogenes System ($b \neq 0$):
lösbar genau dann wenn $b \in \operatorname{Bild} A$ (b als Linearkombination von a_k darstellbar)

affiner Lösungsraum

$$x_* + \operatorname{Kern} A$$

mit einer speziellen Lösung x_*

eindeutig, falls Kern $A = 0$

Cramersche Regel

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x_i \det A = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

mit a_k den Spalten der quadratischen Matrix A

eindeutige Lösung für belibieges b, falls $\det A \neq 0$

$b = e_j$ (Einheitsvektoren) $\rightsquigarrow$ Koeffizienten der Inversen $C = A^{-1}$

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

Rückwärts-Einsetzen

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sukzessive Berechnung der Unbekannten

$$x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n\right)/r_{\ell,\ell}, \quad \ell = n, \ldots, 1$$

Gauß-Elimination

Transformation auf obere Dreiecksform

nach $\ell - 1$ Schritten

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & a_{\ell,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell,n}x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & a_{\ell+1,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell+1,n}x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,\ell}x_\ell & + & \ldots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

ℓ-ter Eliminationsschritt

- evtl. Vertauschung von Zeilen, so dass $a_{\ell,\ell} \neq 0$
- Subtraktion von Vielfachen der ℓ-ten Zeile:
  für $i > \ell$ und $j \geq \ell$

  $$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

  $\rightsquigarrow$ Nullen unterhalb von $a_{\ell\ell}$

Zeilenstufenform eines Gleichungssystems

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & p_1 & * \ldots * & & & & & \\ & & 0 & 0 \ldots 0 & p_2 & * \ldots * & & \\ & & & & 0 & 0 \ldots 0 & p_3 & * \ldots \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

mit Pivots $p_1, \ldots, p_k \neq 0$, $k = \operatorname{Rang} A$

sukzessive Umformung analog zur Gauß-Elimination

Lösung eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 0\dots0 & p_1 & *\dots* & & & & & \\ & & 0 & 0\dots0 & p_2 & *\dots* & & \\ & & & & 0 & 0\dots0 & p_3 & *\dots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

mit Pivots $p_1, \dots, p_k \neq 0$

lösbar genau dann wenn $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$

(i) $k = n \rightsquigarrow$ eindeutige Lösung

(ii) $k < n \rightsquigarrow n - k$ linear unabhängige Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems ($c_i = 0$)

Unbekannte, die den Spalten ohne Pivots entsprechen, frei wählbar

5.8 Eigenwerte, Normalformen und Singulärwertzerlegung

Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum

Eigenvektor v zum Eigenwert λ einer quadratischen Matrix A

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0$$

Eigenraum: $V_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda E)$

Ähnlichkeitstransformation

Basiswechsel

$$A \to B = Q^{-1}AQ$$

erhält Eigenwerte

$$v \text{ Eigenvektor von } A \quad \Leftrightarrow \quad w = Q^{-1}v \text{ Eigenvektor von } B$$

Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) \end{aligned}$$

Eigenwerte λ_k: Nullstellen von p_A

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \mathrm{Spur}\, A, \quad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det A$$

Eigenvektoren v: nicht-triviale Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)v = 0$$

Konstruktion einer Basis für den Eigenraum $V_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda E)$ durch Transformation auf Zeilenstufenform

Algebraische und geometrische Vielfachheit

algebraische Vielfachheit m_λ: Ordnung der Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

geometrische Vielfachheit d_λ: Dimension des Eigenraums $V_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda E_n)$

Beziehungen zwischen m und d

$$d_\lambda \leq m_\lambda, \quad \sum_\lambda m_\lambda = n, \quad d_\lambda = n - \mathrm{Rang}(A - \lambda E)$$

Summe und Produkt von Eigenwerten

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \det A$$

mehrfache Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt

Basis aus Eigenvektoren

Basis aus Eigenvektoren v_k mit Eigenwerten λ_k zu $A \rightsquigarrow$ Diagonalisierung

$$V^{-1}AV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n)$$

5.9 Normalformen

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

Eigenvektoren: Spalten der Fourier-Matrix

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\ldots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$$

Diagonalform

$$\frac{1}{n}\overline{W}\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, n-1$$

Unitäre Diagonalisierung

A normal, d.h. $A^*A = AA^* \quad \Leftrightarrow$

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

mit einer unitären Matrix U (Spalten: orthonormale Basis aus Eigenvektoren)

Diagonalisierung hermitescher Matrizen

$A = A^* \implies$ reelle Eigenwerte und Orthonormalbasis aus Eigenvektoren u_k

$$U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad U = (u_1, \ldots, u_n)$$

hermitesch $\Leftrightarrow$ symmetrisch für reelle Matrizen

Rayleigh-Quotient

S hermitesch positiv definit $\implies$

$$r_S(x) = \frac{x^*Sx}{x^*x}, \quad x \neq 0$$

für kleinsten und größten Eigenwert extremal

Jordan-Form

Ähnlichkeitstranformation auf die Blockdiagonalform

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

mit λ_i den Eigenwerten von A

Dominanter Eigenwert

λ betragsmäßig größter Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \implies$

$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \to \infty\,,$$

falls x eine nichttriviale Komponente im Eigenraum von λ hat

Konvergenz von Matrix-Potenzen

$A^n \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_k| < 1\ \forall k$

A^n beschränkt $\quad \Leftrightarrow \quad |\lambda_k| \le 1\ \forall k$ und $|\lambda_k| = 1$ nur für Eigenwerte mit gleicher algebraischer und geometrischer Vielfachheit

Divergenz von A^n in allen anderen Fällen

5.10 Ausgleichsprobleme

Ausgleichsgerade

lineare Approximation von Daten (t_k, f_k) durch Minimierung der Fehlerquadratsumme

$$\sum_{k=1}^{n} (f_k - p(t_k))^2, \quad p(t) = u + vt$$

eindeutig lösbar bei mindestens zwei verschiedenen Abszissen t_i

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}, \quad v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

Normalengleichungen

$$|Ax - b| \to \min \quad \Leftrightarrow \quad A^{\mathrm{t}} Ax = A^{\mathrm{t}} b$$

eindeutige Lösung x, falls die Spalten von A linear unabhängig sind

Singulärwert-Zerlegung

$$U^* AV = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}, \quad s_1 \geq \cdots \geq s_k > s_{k+1} = \cdots = 0$$

mit $k = \operatorname{Rang} A$

singuläre Werte s_j: Wurzeln der Eigenwerte von $A^* A$

Spalten u_j von U und v_j von V: orthonormale Basen aus Eigenvektoren von AA^* bzw. $A^* A$

$$Av_j = s_j u_j, \quad Ax = \sum_{i=1}^{k} s_i (v_i^* x) u_i$$

Pseudo-Inverse

$$A^+ = VS^+ U^*, \quad S^+ = \operatorname{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_k, 0, \ldots, 0)$$

mit $s_i > 0$ den Singulärwerten von A

$x = A^+ b$: Minimum-Norm-Lösung des Ausgleichsproblems $|Ax - b| \to \min$

5.11 Orthogonale Transformationen und Quadriken

Spiegelung

(orthogonale) Spiegelungsmatrix

$$Q = E - \frac{2}{|d|^2} d d^{\mathrm{t}}$$

mit d einem Normalenvektor der Spiegelungsebene

Drehung

Drehung um den Winkel φ in der $x_i x_j$-Ebene $\rightsquigarrow$ Drehmatrix $Q_{i,j}$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Zeile } i \;\; \rightarrow \\ \\ \text{Zeile } j \;\; \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & -s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit $c = \cos\varphi$ und $s = \sin\varphi$

Q orthogonal, $\det Q = 1 \implies$

$$Q = \prod_{i<j} Q_{i,j}$$

Drehung im Raum

$$x \mapsto Qx = \cos\varphi\, x + (1 - \cos\varphi) u u^{\mathrm{t}} x + \sin\varphi\, u \times x$$

mit normierter Drehachsenrichtung u, Drehwinkel φ (orientiert wie eine Rechtsschraube) und $\times$ dem Kreuzprodukt

$$Qu = u, \quad \cos\varphi = (\operatorname{Spur} Q \, - \, 1)/2$$

entsprechende Drehmatrix

$$Q: \quad q_{ik} \;=\; \cos\varphi\, \delta_{ik} + (1 - \cos\varphi)\, u_i u_k + \sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j$$

Drehachse und Drehwinkel

Jede Drehung Q im $\mathbb{R}^3$ besitzt eine Drehachse, d.h. lässt einen Einheitsvektor u invariant, und entspricht einer ebenen Drehung um einen Winkel φ in der zu u orthogonalen Ebene.

Bezüglich eines orthonormalen Rechtssystems u, v, w besitzt Q die Matrixdarstellung

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} .$$

Insbesondere gilt für den Drehwinkel

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Spur} Q - 1\right) .$$

Quadrik

$$Q : x^{\mathrm{t}} A x + 2 b^{\mathrm{t}} x + c = 0$$

homogene Form: $Q : \ \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$ mit

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^{\mathrm{t}} \\ \hline b & A \end{array}\right) , \quad \tilde{x}^t = (1, x_1, \ldots, x_n)$$

Klassifizierung

- kegelige Quadrik: $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$
- Mittelpunktsquadrik: $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$
- parabolische Quadrik: $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$

Hauptachsentransformation

Drehung und Verschiebung $\rightsquigarrow$ Normalform

$$x^{\mathrm{t}} A x + 2 b^{\mathrm{t}} x + c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma , \quad x = U w + v$$

mit $m = \operatorname{Rang} A$ und $\beta\gamma = 0$

Spalten der Drehmatrix U: Eigenvektoren u_i (Hauptachsen) zu den Eigenwerten λ_i von A

Verschiebungsvektor v: Mittelpunkt der Quadrik

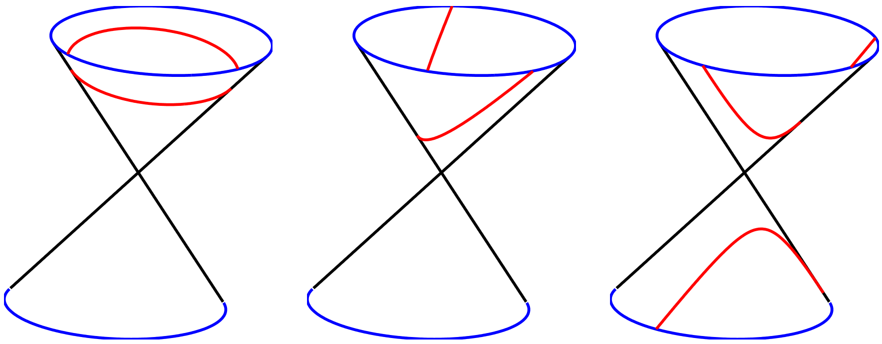
Kegelschnitt

Doppel-Kegel mit Spitze p ($p_3 \neq 0$), Richtung v und Öffnungswinkel α

$$K: \ (x-p)^{\mathrm{t}} v = \pm \cos \frac{\alpha}{2} \, |x-p||v|$$

Schnitt mit der Ebene $E: \ x_3 = 0 \rightsquigarrow$ ebene Quadrik

Typ bestimmt durch Winkel β der Achse mit der Ebene E



Ellipse: $\beta > \alpha/2$ Parabel: $\beta = \alpha/2$ Hyperbel: $\beta < \alpha/2$

Euklidische Normalformen der zweidimensionalen Quadriken

- Kegelige Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punkt
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade

- Mittelpunktsquadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Hyperbel
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Ellipse
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	paralleles Geradenpaar

- Parabolische Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	Parabel

Euklidische Normalformen der dreidimensionalen Quadriken

- Kegelige Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	Punkt
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	(Doppel-)Kegel
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Gerade
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidende Ebenen
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelebene

- Mittelpunktsquadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	Ellipsoid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	elliptischer Zylinder
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	parallele Ebenen

- Parabolische Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	elliptisches Paraboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	hyperbolisches Paraboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	parabolischer Zylinder