

## 4.5 Uneigentliche Integrale

### Uneigentliches Integral

Singularität bei  $b$  ( $b = \infty$  oder unbeschränkter Integrand)

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f$$

Singularität an beiden Grenzen:

Grenzwert muss unabhängig von der Wahl der Folgen  $c \rightarrow a+$ ,  $d \rightarrow b-$  sein

hinreichend: absolute Integrierbarkeit, d. h.

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{const}$$

für alle Teilintervalle  $[c, d] \subset (a, b)$

### Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

$g$  absolut integrierbar,  $|f(x)| \leq c|g(x)|$ ,  $a < x < b$  (Majorante)

$\implies$  absolute Integrierbarkeit von  $f$  auf  $[a, b]$

### Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x \in (0, \infty)$$

Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

insbesondere  $\Gamma(n+1) = n!$

einfache Pole für  $x = 0, -1, \dots$