

4.4 Trigonometrische Integranden

Integration trigonometrischer Polynome

$$\int \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \dots = 2\pi c_0$$

Integration von Polynomen in $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ mit Hilfe der Formel von Euler-Moivre

Trigonometrische Substitutionen

Substitutionen für algebraische Integranden

$$\begin{array}{lll} x = a \sin t : & dx = a \cos t dt & \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \\ x = a \tan t : & dx = a / \cos^2 t dt & \sqrt{a^2 + x^2} = a / \cos t \\ x = a / \cos t : & dx = a \sin t / \cos^2 t dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t \end{array}$$

Hyperbolische Substitutionen

Substitutionen für algebraische Integranden

$$\begin{array}{lll} x = a \sinh t : & dx = a \cosh t dt & \sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh t \\ x = a \cosh t : & dx = a \sinh t dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a \sinh t \end{array}$$

Rationale Funktionen von Sinus und Kosinus

Substitution $x = \tan(t/2) \rightsquigarrow$

$$\int r(\cos t, \sin t) dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2} dx$$

für eine beliebige rationale Funktion r