

## 4.1 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

### Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \int_a^b f_{\Delta} = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

mit  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  einer Zerlegung von  $[a, b]$ ,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $|\Delta|$  der maximalen Länge der Teilintervalle und  $\xi_k$  einem beliebigem Punkt im  $k$ -ten Intervall

### Eigenschaften des Integrals

- Linearität:  $\int r f = r \int f$ ,  $\int f + g = \int f + \int g$
- Monotonie:  $f \leq g \implies \int f \leq \int g$
- Additivität:  $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ , insbesondere  $\int_b^a f = -\int_a^b f$

### Mittelwertsatz der Integralrechnung

$g$  ohne Vorzeichenwechsel  $\implies$

$$\int_a^b f g = f(c) \int_a^b g \quad \text{für ein } c \in [a, b]$$

insbesondere:  $\int_a^b f = (b - a)f(c)$

### Stammfunktion

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad F' = f$$

beliebige Integrationskonstante  $c$

### Stammfunktionen einiger Grundfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^s, s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$	$1/x$	$\ln x $
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

### Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = F(b) - F(a), \quad F' = f$$