Teil 4

Integralrechnung

4.1 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

mit $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ einer Zerlegung von $[a,b]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $|\Delta|$ der maximalen Länge der Teilintervalle und ξ_k einem beliebigem Punkt im k-ten Intervall

Eigenschaften des Integrals

- Linearität: $\displaystyle\int rf = r\int f\,,\ \int f+g = \int f + \int g$
- Monotonie: $\displaystyle f \le g \implies \int f \le \int g$
- Additivität: $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f,$ insbesondere $\int_b^a f = -\int_a^b f$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

g ohne Vorzeichenwechsel $\implies$

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g \quad \text{für ein } c \in [a,b]$$

insbesondere: $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

Stammfunktion

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad F' = f$$

beliebige Integrationskonstante c

Stammfunktionen einiger Grundfunktionen

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F]_a^b = F(b) - F(a), \quad F' = f$$

4.2 Integrationsregeln

Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

entsprechende Formel für bestimmte Integrale

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

kein Randterm für periodische Funktionen mit Periodenlänge $(b-a)$ und wenn eine der beiden Funktionen an den Intervallendpunkten Null ist

Dirac- und Heaviside-Funktion

$$\int_{\mathbb{R}} \delta f = f(0)$$

verallgemeinerte Ableitung der Heavisideschen Sprungfunktion

$$\delta = H', \quad H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Variablensubstitution

Substitution $y = g(x) \rightsquigarrow$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy$$

bzw.

$$\int_a^b f(g(x))\underbrace{g'(x)}_{dy/dx}\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

für bestimmte Integrale

4.3 Rationale Integranden

Elementare rationale Integranden

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{ax+b} &= \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c \\
\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c \\
\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c
\end{aligned}$$

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polstellen

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n}+c$$

rekursive Berechnung bei quadratischen Faktoren $q(x)=(x-a)^2+b^2$ für mehrfache komplex konjugierte Polstellen

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = -\frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}$$

Partialbruchzerlegung

Darstellung als Summe der drei elementaren Grundtypen

$$ax^n, \quad \frac{c}{(ax+b)^n}, \quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

4.4 Trigonometrische Integranden

Integration trigonometrischer Polynome

$$\int \sum_{|k|\leq n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, dx = c + c_0 x + \sum_{0\neq|k|\leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad \int_{\pi}^{\pi} \ldots = 2\pi c_0$$

Integration von Polynomen in $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ mit Hilfe der Formel von Euler-Moivre

Trigonometrische Substitutionen

Substitutionen für algebraische Integranden

$$\begin{array}{lll}
x = a\sin t: & dx = a\cos t\, dt & \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \\
x = a\tan t: & dx = a/\cos^2 t\, dt & \sqrt{a^2 + x^2} = a/\cos t \\
x = a/\cos t: & dx = a\sin t/\cos^2 t\, dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t
\end{array}$$

Hyperbolische Substitutionen

Substitutionen für algebraische Integranden

$$\begin{array}{lll}
x = a\sinh t: & dx = a\cosh t\, dt & \sqrt{x^2 + a^2} = a\cosh t \\
x = a\cosh t: & dx = a\sinh t\, dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a\sinh t
\end{array}$$

Rationale Funktionen von Sinus und Kosinus

Substitution $x = \tan(t/2) \rightsquigarrow$

$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}\, dx$$

für eine beliebige rationale Funktion r

4.5 Uneigentliche Integrale

Uneigentliches Integral

Singularität bei b ($b = \infty$ oder unbeschränkter Integrand)

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

Singularität an beiden Grenzen:

Grenzwert muss unabhängig von der Wahl der Folgen $c \to a+$, $d \to b-$ sein

hinreichend: absolute Intergrierbarkeit, d. h.

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{ const}$$

für alle Teilintervalle $[c, d] \subset (a, b)$

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

g absolut integrierbar, $|f(x)| \leq c\,|g(x)|$, $a < x < b$ (Majorante)
$\implies$ absolute Integrierbarkeit von f auf $[a, b]$

Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x \in (0, \infty)$$

Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

insbesondere $\Gamma(n+1) = n!$

einfache Pole für $x = 0, -1, \ldots$