3.9 Taylor-Entwicklung

Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

interpoliert Ableitungen von f

Restglied

$$R = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

für ein t zwischen a und x.

Newton-Verfahren

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

quadratische Konvergenz gegen Nullstelle x_* von f

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c\ |x_\ell - x_*|^2$$

Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)$$

Konvergenz in einem Intervall $(a-r, a+r)$ mit

$$r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |c_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

Binomialreihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

konvergent für $|x| < 1$

Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k \\ \int f(x)dx &= c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k \end{aligned}$$

Multiplikation von Taylor-Reihen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

mit $c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} g_j$

Division von Taylor-Reihen

Koeffizienten von

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k, \quad g_0 \neq 0,$$

durch Koeffizientenvergleich aus der Identität

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\,, \quad u = x - a$$

Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

Berechnung der Taylor-Koeffizienten der Umkehrfunktion g von f mit $f'(a) \neq 0$ im Punkt $b = f(a) \Leftrightarrow a = g(b)$ durch Differentiation von

$$g(f(x)) = x\,,$$

d.h.

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \;\to\; g'(b), \quad g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \;\to\; g''(b), \quad \ldots$$

Spezielle Taylor-Reihen

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots && x \in \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots && -1 < x \leq 1 \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \cdots && x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots && x \in \mathbb{R} \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \cdots && |x| < 1
\end{aligned}$$