3.5 Reihen

Grenzwert einer Reihe

Konvergenz $\Leftrightarrow$ Konvergenz der Partialsummen

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \Leftrightarrow \quad s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

notwendig: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

Harmonische Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

allgemeiner: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, Konvergenz $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

Absolut konvergente Reihen

Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

$\implies$ Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, beliebige Umordnung der Summanden möglich

Majorante und Minorante einer Reihe

$$\sum_n |b_n| < \infty \quad \implies \quad \sum_n |a_n| < \infty \quad \text{falls} \quad |a_n| \le c|b_n|,\ n \ge n_0$$

umgekehrt: Divergenz von $\sum_n |b_n| \implies$ Divergenz von $\sum_n |a_n|$,
falls $|a_n| \ge c|b_n|$ für alle bis auf endlich viele n

Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q \in (0,1), \quad n > n_0$$

$\implies$ absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$

alternativ: $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = q \in (0,1)$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1, \quad n > n_0$$

$\implies$ Divergenz von $\sum_n a_n$

Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1, \quad n > n_0$$

$\implies$ absolute Konvergenz $\sum a_n$

alternativ: $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1, \quad n > n_0$$

$\implies$ Divergenz von $\sum a_n$

Leibniz-Kriterium

(a_k) monotone Nullfolge $\implies$ Konvergenz der alternierenden Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

Reihenrest: $|\sum_{k=n+1}^{\infty} \ldots| \le |a_{n+1}|$

Eulersche Zahl

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad \mathrm{e} = 2.71828182845905\ldots$$

Spezielle Reihen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} aq^k &= a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1 \\
\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2 \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \mathrm{e}
\end{aligned}$$