3.4 Folgen

Grenzwert

$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon\, \forall n > n_\varepsilon: \;\; |a_n - a| < \varepsilon$$

Rechenregeln für Grenzwerte

$a_n \to a$ und $b_n \to b \implies$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n/b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$

Cauchy-Kriterium

Konvergenz von $(a_n) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon\, \forall j, k > n_\varepsilon: \;\; |a_j - a_k| < \varepsilon$$

Monotone Konvergenz einer Folge

$a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq c \implies$ Konvergenz gegen Grenzwert $a \leq c$

analog: Konvergenz monoton fallender, nach unten beschränkter Folgen

Uneigentliche Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow$

$$\forall a > 0\, \exists n_a\, \forall n > n_a: \;\; a_n > a$$

analog: $a_n \to -\infty$

Limes Inferior und Limes Superior

$$\begin{aligned} \varliminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,, \;\; \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k \\ \varlimsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,, \;\; \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k \end{aligned}$$

$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \implies$ Konvergenz von (a_n) gegen a

Vergleichskriterium für Folgen

$\lim a_n = a$, $\lim c_n = c$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ für $n > n_0 \implies$

$$a \leq \varliminf b_n \leq \varlimsup b_n \leq c$$

$a = c \implies$ Konvergenz von (b_n)

Häufungspunkt einer Folge

Grenzwert a einer konvergenten Teilfolge von (a_n)

$\Leftrightarrow$ jedes Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, enthält unendlich viele Folgenelemente

Rekursive Approximation von Pi

a_n, b_n: halbe Umfänge der um- bzw. einbeschriebenen $(6 \cdot 2^n)$-Ecke eines Einheitskreises

$\rightsquigarrow$ rekursiv definierte, gegen $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ konvergene Folgen

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,, \, b_0 = 3$$

Spezielle Grenzwerte von Folgen

a_n	$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n\,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha}\ln n\,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$