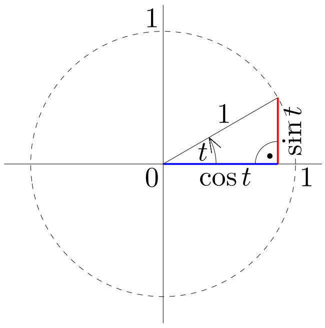
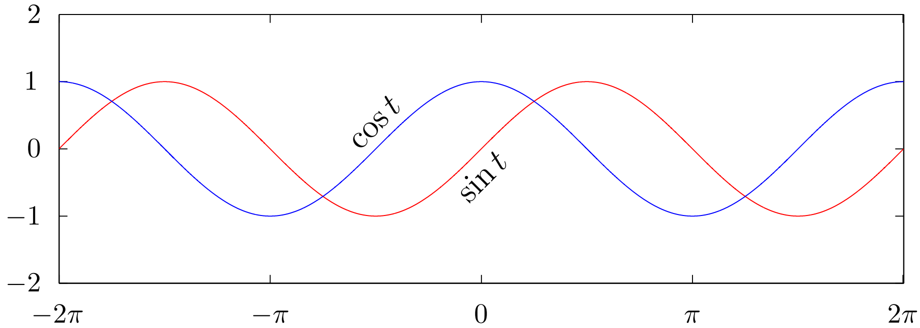
3.3 Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

Sinus und Kosinus





Identitäten

- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

spezielle Werte

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Formel von Euler-Moivre

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Sinus und Kosinus: Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1

$$\cos t = \mathrm{Re}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$
$$\sin t = \mathrm{Im}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$

Additionstheoreme von Sinus und Kosinus

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

insbesondere: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Tangens und Kotangens

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

spezielle Werte

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Arkusfunktionen

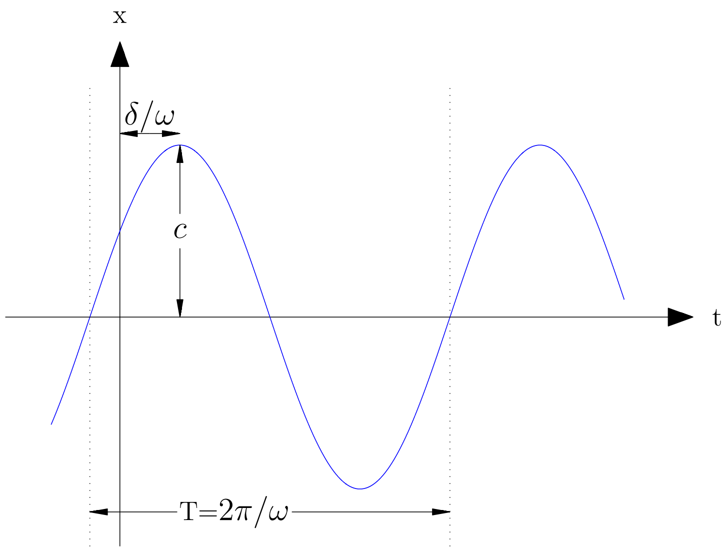
Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \arccos &: [-1\ldots 1] \to [\pi \ldots 0] \\ \arcsin &: [-1\ldots 1] \to [-\pi/2 \ldots \pi/2] \\ \arctan &: [-\infty \ldots \infty] \to [-\pi/2 \ldots \pi/2] \end{aligned}$$

Harmonische Schwingung

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)$$

Amplitude $c \geq 0$, Phasenverschiebung δ, Frequenz ω bzw. Periode $T = 2\pi/\omega$



äquivalente Darstellungen

$$x(t) = \operatorname{Re} c\exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta)) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

mit $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$

Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

$$\sum_{k=1}^{2} c_k \cos(\omega t - \delta_k) = c \cos(\omega t - \delta)$$

mit $c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2}$

alternative Darstellung $x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$

$\rightsquigarrow c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$

Modulierte Schwingung

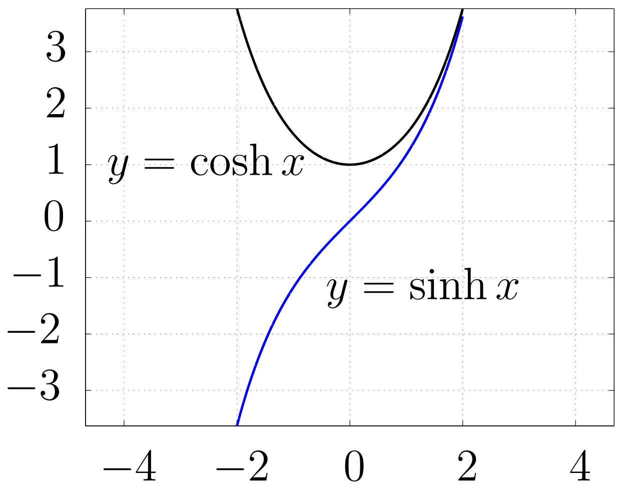
$$\sum_{k=1}^{2} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t} = c(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega} t}, \quad c(t) = c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\omega t} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\omega t}$$

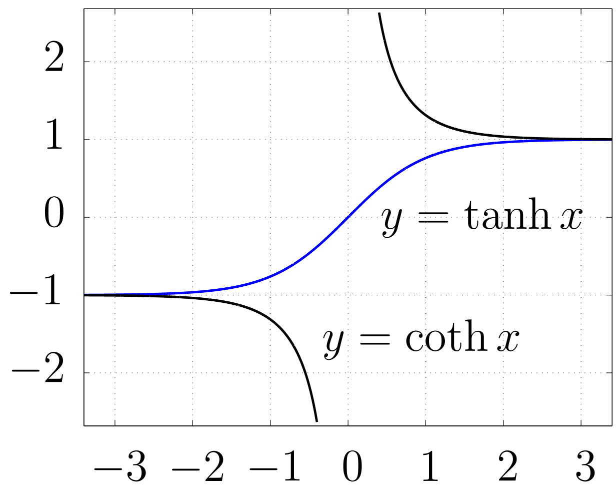
mit $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ und $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$

periodisch bei rationalem Frequenzverhältnis ω_1/ω_2

Hyperbelfunktionen

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x$$





Hyperbolische Identitäten

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1
\end{aligned}$$