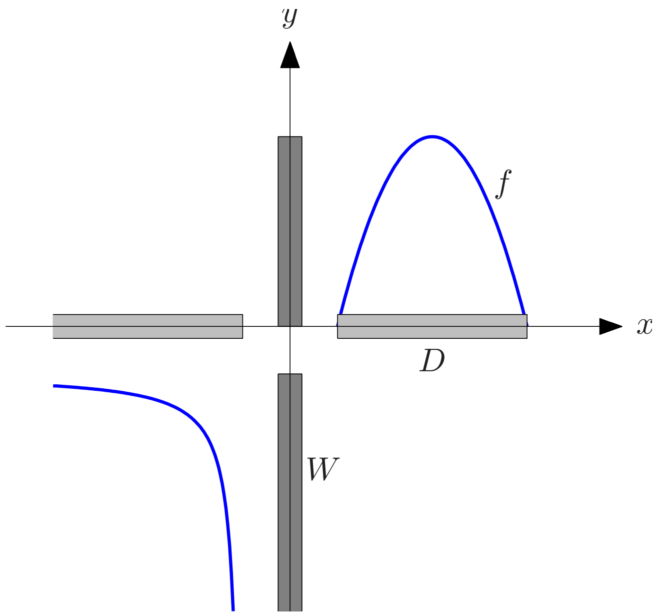
3.1 Polynome und rationale Funktionen

Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

ordnet jedem Argument x aus dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ einen Wert $f(x)$ aus dem Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ zu



Graph: Paare (x, y) mit $y = f(x)$

Umkehrfunktion

injektive Funktion $f : D \ni x \to y = f(x) \in W \rightsquigarrow$

$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Graph: Spiegelbild des Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden

Rechnen mit Funktionen

punktweise definierte Operationen

- Linearkombination: $(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x)$
- Produkt und Quotient: $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$
- Hintereinanderschaltung: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Gerade und ungerade Funktionen

gerade: symmetrisch zur y-Achse, $f(x) = f(-x)$
ungerade: punktsymmetrisch zum Ursprung, $f(x) = -f(-x)$

Monotone Funktion

wachsend

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

$\Leftrightarrow f' \geq 0$ bis auf isolierte Punkte
analog: monoton fallend $(\leq \leftrightarrow \geq)$

Konvexe Funktion

Sekante oberhalb des Graphen

$$f((1-t)\,x_1 + tx_2) \le (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2), \quad t \in (0,1)$$

$\Leftrightarrow f'' \ge 0$ bis auf isolierte Punkte

Konvexität $\implies$ Stetigkeit

Polynom

Polynom p vom Grad n

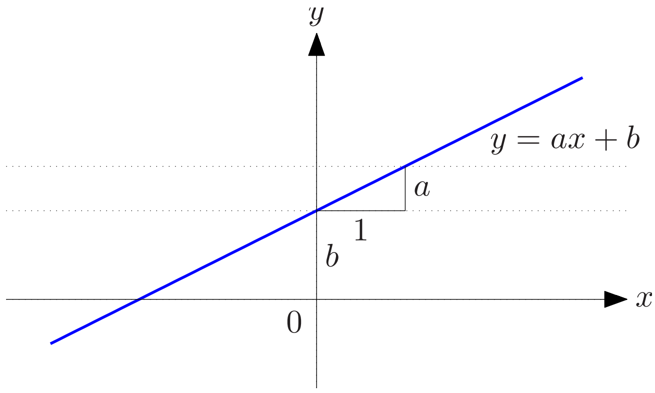
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \ne 0$$

reelle oder komplexe Koeffizienten a_k

Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b$$

Graph: Gerade mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b



- Punkt-Steigungs-Form: $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = a$
- Zwei-Punkte-Form: $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad y = a(x-x_0)^2 + y_0$$

Graph: Parabel mit Scheitel $(x_0, y_0) = (-b/(2a), -b^2/(4a) + c)$

Polynomdivision

Division mit Rest

$$p = fq + r, \quad \operatorname{Grad} f = \operatorname{Grad} p - \operatorname{Grad} q \ge 0,\ \operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q$$

$p(t) = 0, q(x) = (x-t) \implies r = 0$, d.h. $p(x) = f(x)(x-t)$

Faktorisierung von Polynomen

Linearfaktoren zu komplexen Nullstellen z_k

$$p(z) = c(z-z_1)\cdots(z-z_n)$$

Paare komplex konjugierter Nullstellen $x_k \pm \mathrm{i}y_k \rightsquigarrow$ reelle quadratische Faktoren

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z-x_k)^2 + y_k^2$$

Interpolationspolynom in Lagrange-Form

$p(x_k) = f_k \implies$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

linearer Interpolant ($n = 1$)

$$p(x) = f_0 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Rationale Funktion

Quotient zweier Polynome

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$$

irreduzibel, wenn p und q keinen gemeinsamen Linearfaktor besitzen
Polstellen: Nullstellen des Nenners, Ordnung entspricht der Vielfachheit

Partialbruchzerlegung

Zerlegung entsprechend der Polstellen z_j (Ordnung m_j)

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = f(z) + \sum_j r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}}$$

Grad f = Grad p − Grad q ($f = 0$, falls Zählergrad < Nennergrad)
Berechnungsmethoden

- Multiplikation mit
$$q(z) = c \prod_j (z - z_j)^{m_j}$$
und Vergleich der Koeffizienten von z^k
- Multiplikation mit $(z - z_j)^{m_j}$ und Setzen von $z = z_j \rightsquigarrow$ Koeffizient a_{j,m_j};
rekursive Anwendung nach Subtraktion bereits bestimmter Terme

Reelle Partialbruchzerlegung

reelle Polstellen x_j (Vielfachheit m_j) und komplex-konjugierte Polstellen $u_k \pm \mathrm{i}v_k$ (Vielfachheit n_k) $\rightsquigarrow$

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \sum_j \sum_{\nu=1}^{m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu=1}^{n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

Grad f = Grad p − Grad q ($f = 0$ falls Zählergrad < Nennergrad)
Berechnungsmethoden

- Multiplikation mit
$$q(z) = c \prod_j (z - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$
und Vergleich der Koeffizienten von z^ℓ
- Zusammenfassen komplex-konjugierter Terme der komplexen Partialbruchzerlegung