Teil 3

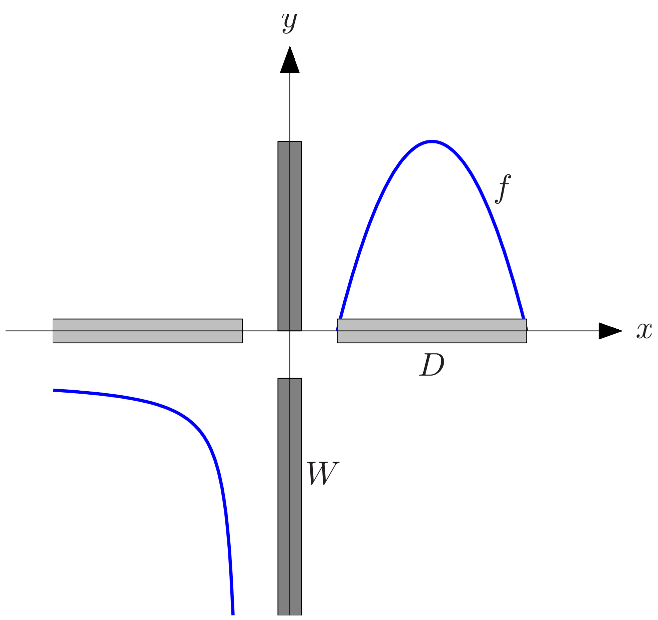
Differentialrechnung

3.1 Polynome und rationale Funktionen

Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

ordnet jedem Argument x aus dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ einen Wert $f(x)$ aus dem Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ zu



Graph: Paare (x, y) mit $y = f(x)$

Umkehrfunktion

injektive Funktion $f : D \ni x \to y = f(x) \in W \rightsquigarrow$

$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Graph: Spiegelbild des Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden

Rechnen mit Funktionen

punktweise definierte Operationen

- Linearkombination: $(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x)$
- Produkt und Quotient: $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$
- Hintereinanderschaltung: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Gerade und ungerade Funktionen

gerade: symmetrisch zur y-Achse, $f(x) = f(-x)$
ungerade: punktsymmetrisch zum Ursprung, $f(x) = -f(-x)$

Monotone Funktion

wachsend

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2)$$

$\Leftrightarrow$ $f' \ge 0$ bis auf isolierte Punkte
analog: monoton fallend $(\le \leftrightarrow \ge)$

Konvexe Funktion

Sekante oberhalb des Graphen

$$f((1-t)\,x_1 + tx_2) \le (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2), \quad t \in (0,1)$$

$\Leftrightarrow f'' \ge 0$ bis auf isolierte Punkte

Konvexität $\implies$ Stetigkeit

Polynom

Polynom p vom Grad n

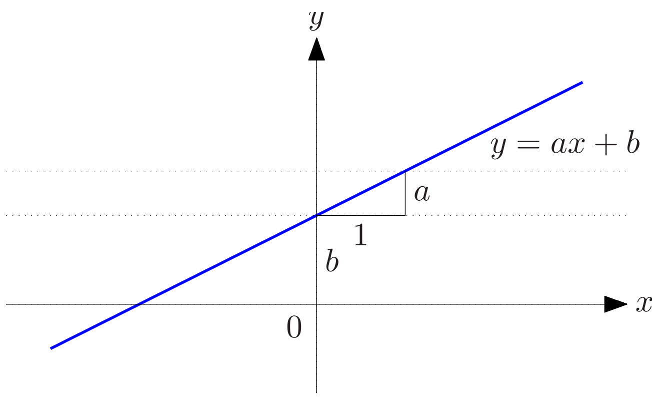
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \ne 0$$

reelle oder komplexe Koeffizienten a_k

Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b$$

Graph: Gerade mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b



- Punkt-Steigungs-Form: $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = a$
- Zwei-Punkte-Form: $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad y = a(x-x_0)^2 + y_0$$

Graph: Parabel mit Scheitel $(x_0, y_0) = (-b/(2a), -b^2/(4a) + c)$

Polynomdivision

Division mit Rest

$$p = fq + r, \quad \text{Grad}\ f = \text{Grad}\,p - \text{Grad}\,q \ge 0,\ \text{Grad}\,r < \text{Grad}\,q$$

$p(t) = 0, q(x) = (x-t) \implies r = 0$, d.h. $p(x) = f(x)(x-t)$

Faktorisierung von Polynomen

Linearfaktoren zu komplexen Nullstellen z_k

$$p(z) = c(z-z_1)\cdots(z-z_n)$$

Paare komplex konjugierter Nullstellen $x_k \pm \mathrm{i}y_k \rightsquigarrow$ reelle quadratische Faktoren

$$(z-x_k-\mathrm{i}y_k)(z-x_k+\mathrm{i}y_k) = (z-x_k)^2 + y_k^2$$

Interpolationspolynom in Lagrange-Form

$p(x_k) = f_k \implies$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

linearer Interpolant ($n = 1$)

$$p(x) = f_0 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Rationale Funktion

Quotient zweier Polynome

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$$

irreduzibel, wenn p und q keinen gemeinsamen Linearfaktor besitzen

Polstellen: Nullstellen des Nenners, Ordnung entspricht der Vielfachheit

Partialbruchzerlegung

Zerlegung entsprechend der Polstellen z_j (Ordnung m_j)

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = f(z) + \sum_j r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}}$$

Grad f = Grad p − Grad q ($f = 0$, falls Zählergrad < Nennergrad)

Berechnungsmethoden

- Multiplikation mit
$$q(z) = c \prod_j (z - z_j)^{m_j}$$
und Vergleich der Koeffizienten von z^k
- Multiplikation mit $(z - z_j)^{m_j}$ und Setzen von $z = z_j \rightsquigarrow$ Koeffizient a_{j,m_j};
rekursive Anwendung nach Subtraktion bereits bestimmter Terme

Reelle Partialbruchzerlegung

reelle Polstellen x_j (Vielfachheit m_j) und komplex-konjugierte Polstellen $u_k \pm \mathrm{i} v_k$ (Vielfachheit n_k) $\rightsquigarrow$

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \sum_j \sum_{\nu=1}^{m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu=1}^{n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

Grad f = Grad p − Grad q ($f = 0$ falls Zählergrad < Nennergrad)

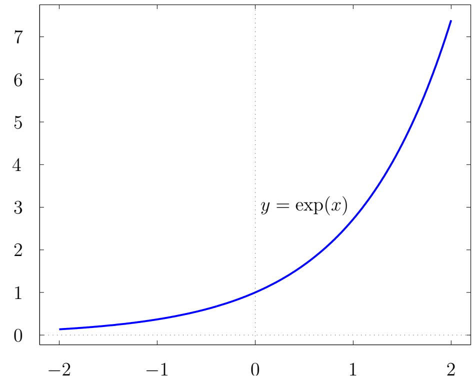
Berechnungsmethoden

- Multiplikation mit
$$q(z) = c \prod_j (z - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$
und Vergleich der Koeffizienten von z^ℓ
- Zusammenfassen komplex-konjugierter Terme der komplexen Partialbruchzerlegung

3.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentialfunktion

$$y = \mathrm{e}^x = \exp(x), \quad \mathrm{e} = 2.71828...$$



Funktionalgleichung

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$$

insbesondere: $\mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^x$

Verzinsung

Endkapital bei Startkapital x nach n-facher Aus- bzw. Einzahlung einer Rate r ($r < 0$ bzw. $r > 0$) und einem Zinsfaktor $(1+p)$

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r$$

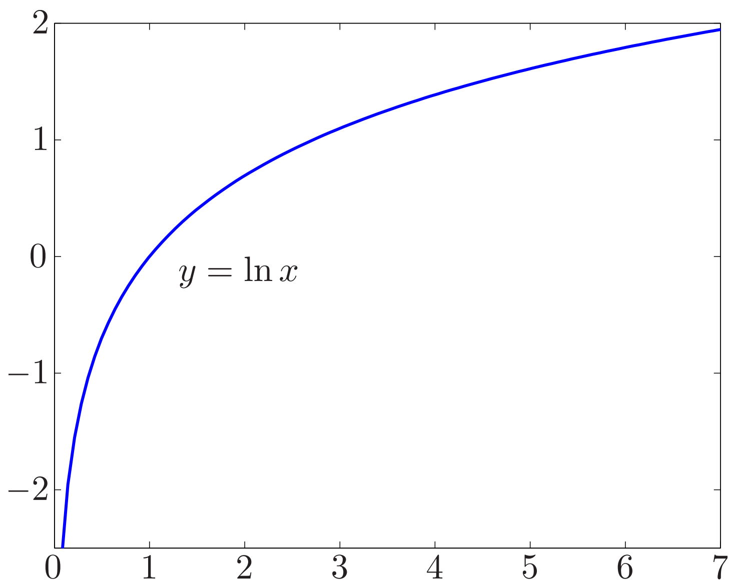
effektiver Jahreszins bei monatlicher Verzinsung mit Zinsfaktor $1 + p_m$

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m$$

Natürlicher Logarithmus

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$y = \mathrm{e}^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$$



Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

insbesondere: $\ln(1/x) = -\ln x$

Allgemeine Potenzfunktion und Logarithmus

$$y = a^x = \exp(x \ln a), \quad a > 0$$

Umkehrfunktion

$$x = \log_a y, \quad y > 0$$

Zehner- und dualer Logarithmus: $\log = \log_{10}$, $\mathrm{ld} = \log_2$

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

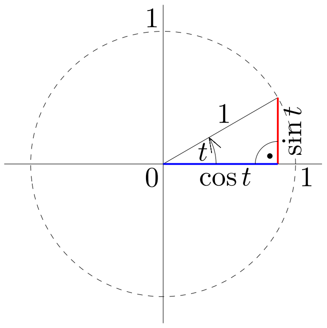
$$\begin{array}{rclrcl} a^{s+t} & = & a^s\,a^t, & \log_a x + \log_a y & = & \log_a(xy), \\ a^{s-t} & = & a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y & = & \log_a(x/y), \\ (a^s)^t & = & a^{st} & \log_a x^t & = & t \log_a x \end{array}$$

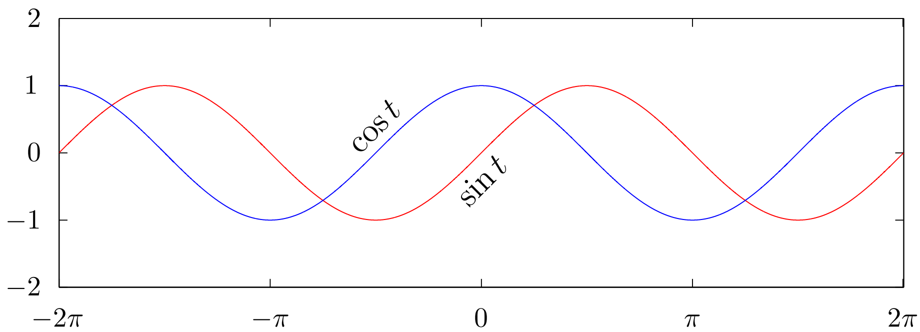
Umrechnung zwischen verschiedenen Basen

$$\log_b x = \log_b a \, \log_a x$$

3.3 Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

Sinus und Kosinus





Identitäten

- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

spezielle Werte

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Formel von Euler-Moivre

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Sinus und Kosinus: Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1

$$\cos t = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$
$$\sin t = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$

Additionstheoreme von Sinus und Kosinus

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

insbesondere: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Tangens und Kotangens

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

spezielle Werte

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Arkusfunktionen

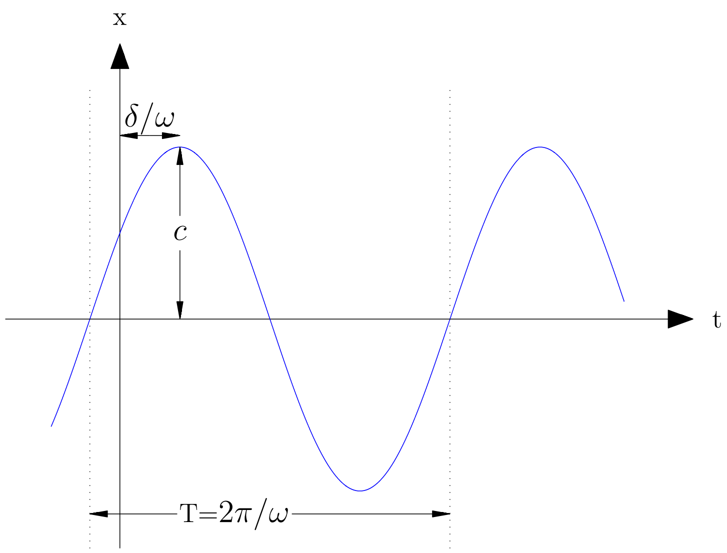
Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} \arccos &: [-1\ldots 1] \to [\pi \ldots 0] \\ \arcsin &: [-1\ldots 1] \to [-\pi/2 \ldots \pi/2] \\ \arctan &: [-\infty \ldots \infty] \to [-\pi/2 \ldots \pi/2] \end{aligned}$$

Harmonische Schwingung

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)$$

Amplitude $c \geq 0$, Phasenverschiebung δ, Frequenz ω bzw. Periode $T = 2\pi/\omega$



äquivalente Darstellungen

$$x(t) = \operatorname{Re} c \exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta)) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

mit $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$

Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

$$\sum_{k=1}^{2} c_k \cos(\omega t - \delta_k) = c\cos(\omega t - \delta)$$

mit $c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2)c_1c_2 + c_2^2}$

alternative Darstellung $x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$

$\rightsquigarrow c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$

Modulierte Schwingung

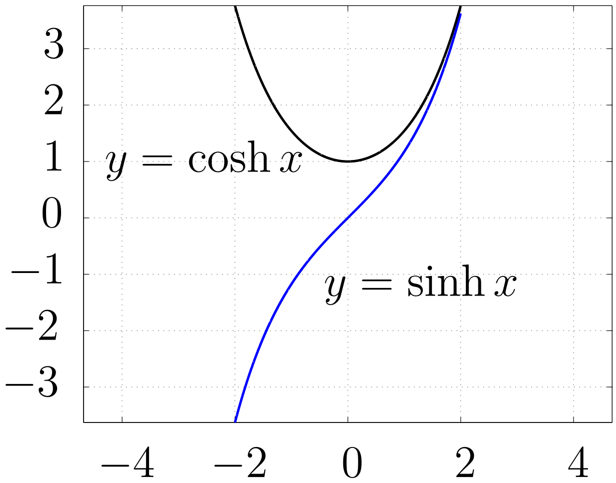
$$\sum_{k=1}^{2} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t} = c(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\omega t} + c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\omega t}$$

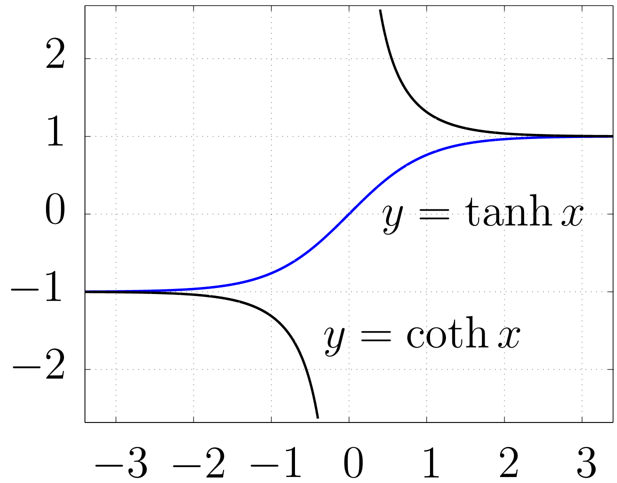
mit $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ und $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$

periodisch bei rationalem Frequenzverhältnis ω_1/ω_2

Hyperbelfunktionen

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x$$





Hyperbolische Identitäten

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1
\end{aligned}$$

3.4 Folgen

Grenzwert

$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon\, \forall n > n_\varepsilon : \; |a_n - a| < \varepsilon$$

Rechenregeln für Grenzwerte

$a_n \to a$ und $b_n \to b \implies$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$

Cauchy-Kriterium

Konvergenz von $(a_n) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon\, \forall j, k > n_\varepsilon : \; |a_j - a_k| < \varepsilon$$

Monotone Konvergenz einer Folge

$a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq c \implies$ Konvergenz gegen Grenzwert $a \leq c$

analog: Konvergenz monoton fallender, nach unten beschränkter Folgen

Uneigentliche Grenzwerte

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow$

$$\forall a > 0\, \exists n_a\, \forall n > n_a : \; a_n > a$$

analog: $a_n \to -\infty$

Limes Inferior und Limes Superior

$$\begin{aligned} \varliminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,, \; \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k \\ \varlimsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,, \; \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k \end{aligned}$$

$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \implies$ Konvergenz von (a_n) gegen a

Vergleichskriterium für Folgen

$\lim a_n = a$, $\lim c_n = c$ und $a_n \leq b_n \leq c_n$ für $n > n_0 \implies$

$$a \leq \varliminf b_n \leq \varlimsup b_n \leq c$$

$a = c \implies$ Konvergenz von (b_n)

Häufungspunkt einer Folge

Grenzwert a einer konvergenten Teilfolge von (a_n)

$\Leftrightarrow$ jedes Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, enthält unendlich viele Folgenelemente

Rekursive Approximation von Pi

a_n, b_n: halbe Umfänge der um- bzw. einbeschriebenen $(6 \cdot 2^n)$-Ecke eines Einheitskreises

$\rightsquigarrow$ rekursiv definierte, gegen $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ konvergene Folgen

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,, \; b_0 = 3$$

Spezielle Grenzwerte von Folgen

a_n	$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n\,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha} \ln n\,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

3.5 Reihen

Grenzwert einer Reihe

Konvergenz $\Leftrightarrow$ Konvergenz der Partialsummen

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \Leftrightarrow \quad s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

notwendig: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

Harmonische Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

allgemeiner: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, Konvergenz $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

Absolut konvergente Reihen

Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

$\Longrightarrow$ Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, beliebige Umordnung der Summanden möglich

Majorante und Minorante einer Reihe

$$\sum_n |b_n| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_n |a_n| < \infty \quad \text{falls} \quad |a_n| \leq c|b_n|,\ n \geq n_0$$

umgekehrt: Divergenz von $\sum_n |b_n| \implies$ Divergenz von $\sum_n |a_n|$,
falls $|a_n| \geq c|b_n|$ für alle bis auf endlich viele n

Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \in (0,1), \quad n > n_0$$

$\Longrightarrow$ absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$

alternativ: $\overline{\lim}_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = q \in (0,1)$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1, \quad n > n_0$$

$\Longrightarrow$ Divergenz von $\sum_n a_n$

Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1, \quad n > n_0$$

$\implies$ absolute Konvergenz $\sum a_n$

alternativ: $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1, \quad n > n_0$$

$\implies$ Divergenz von $\sum a_n$

Leibniz-Kriterium

(a_k) monotone Nullfolge $\implies$ Konvergenz der alternierenden Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

Reihenrest: $|\sum_{k=n+1}^{\infty} \ldots| \leq |a_{n+1}|$

Eulersche Zahl

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad \mathrm{e} = 2.71828182845905\ldots$$

Spezielle Reihen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} aq^k &= a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1 \\
\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2 \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \mathrm{e}
\end{aligned}$$

3.6 Stetigkeit

Stetigkeit

$x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \to f(a) \quad \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon : \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon \; \text{ für } \; |x - a| < \delta_\varepsilon$$

Einseitige Stetigkeit

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f^-(a), \quad \lim_{x \to a+} f(x) = f^+(a)$$

Regeln für stetige Funktionen

f und g stetig $\Longrightarrow$

$$f \pm g, \qquad f/g \quad (g \neq 0), \qquad f \circ g$$

stetig

Zwischenwertsatz

Annahme aller Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ für stetige Funktionen

Satz vom Maximum und Minimum

Existenz von Minimum und Maximum für stetige Funktionen auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall

Gleichmäßige Stetigkeit

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon : \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ für } |x - a| < \varepsilon$$

(δ_ε unabhängig von a)

3.7 Differentiationsregeln

Ableitung

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

alternative Schreibweisen: $f'(x) = dy/dx = (d/dx)f(x)$

Tangente: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Linearität der Ableitung

$$(rf)' = rf' \quad (r \in \mathbb{R}), \qquad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

Ableitungen von Grundfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$x^r,\ r \neq 0$	rx^{r-1}
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

insbesondere: $(1/g)' = -g'/g^2$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx}\, f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

bzw. mit $f(y) = z$, $g(x) = y$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$y = f(x)$, $x = f^{-1}(y) \implies$

$$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$$

bzw. $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$

Logarithmische Ableitung

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)| \quad (f \neq 0)$$

$\rightsquigarrow$ Differentiation von Funktionen der Form $y = g(x)^{h(x)}$ mit $g(x) > 0$

3.8 Anwendungen

Satz von Rolle

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = 0 \quad \text{für ein } c \in (a,b)$$

allgemeiner: n Nullstellen von f einschließlich Vielfachheiten $\rightsquigarrow$ mindestens $n-k$ Nullstellen von $f^{(k)}$

Mittelwertsatz

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a) \quad \text{für ein } t \in (a,b)$$

Fehlerfortpflanzung

absoluter Fehler

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

relativer Fehler

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

Abschätzung mit Hilfe geeigneter Schranken für f'

Landau-Symbole

$$f(x) = O(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \le c|g(x)|$$

für $x \to x_0$

$$f(x) = o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$$

Regel von l'Hospital

$f(a) = 0 = g(a)$ oder $|f(a)| = \infty = |g(a)|$ $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

falls der rechte Grenzwert existiert (gegebenenfalls im uneigentlichen Sinn)

3.9 Taylor-Entwicklung

Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

interpoliert Ableitungen von f

Restglied

$$R = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

für ein t zwischen a und x.

Newton-Verfahren

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

quadratische Konvergenz gegen Nullstelle x_* von f

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c\ |x_\ell - x_*|^2$$

Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)$$

Konvergenz in einem Intervall $(a-r, a+r)$ mit

$$r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |c_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

Binomialreihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

konvergent für $|x| < 1$

Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k \\ \int f(x)dx &= c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k \end{aligned}$$

Multiplikation von Taylor-Reihen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

mit $c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} g_j$

Division von Taylor-Reihen

Koeffizienten von

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k, \quad g_0 \neq 0,$$

durch Koeffizientenvergleich aus der Identität

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\,, \quad u = x - a$$

Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

Berechnung der Taylor-Koeffizienten der Umkehrfunktion g von f mit $f'(a) \neq 0$ im Punkt $b = f(a) \Leftrightarrow a = g(b)$ durch Differentiation von

$$g(f(x)) = x\,,$$

d.h.

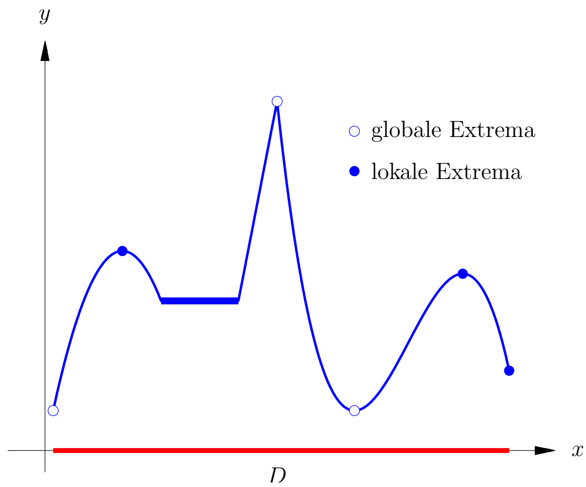
$$g'(b)\, f'(a) = 1 \;\rightarrow\; g'(b), \quad g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \;\rightarrow\; g''(b), \quad \ldots$$

Spezielle Taylor-Reihen

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots && x \in \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots && -1 < x \leq 1 \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \cdots && x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots && x \in \mathbb{R} \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \cdots && |x| < 1
\end{aligned}$$

3.10 Extremwerte und Funktionsuntersuchung

Extremwert



Extremwerte nur an den Nullstellen der Ableitung, Unstetigkeitsstellen oder Randpunkten

Extremwerttest

$$f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0 \qquad (f''(a) < 0)$$

$\implies$ lokales Minimum (Maximum) bei a

allgemeiner: Extremstelle, falls

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

mit n gerade

lokales Maximum (Minimum), falls $f^{(n)}(a) < 0$ ($f^{(n)}(a) > 0$)

Wendepunkte

Nullstelle a von f'' mit Vorzeichenwechsel

hinreichend: $f'''(a) \neq 0$

Asymptoten

lineare Funktion $p(x) = ax + b$ mit

$$f(x) - p(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty \text{ oder } x \to -\infty$$

Funktionsuntersuchung

Bestimmung qualitativer Merkmale einer Funktion

- Symmetrien
- Periodizität
- Unstetigkeitsstellen
- Nullstellen ($\to$ Vorzeichen)
- Extrema ($\to$ Monotoniebereiche)
- Wendepunkte ($\to$ Konvexitätsbereiche)
- Polstellen
- Asymptoten