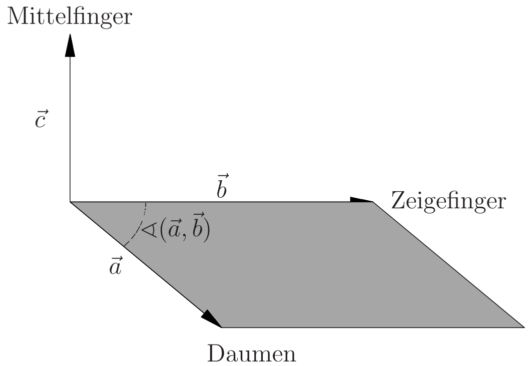
2.4 Vektorprodukt- und Spatprodukt

Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, gemäß der „Rechten-Hand-Regel“ orientiert
Länge: Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$$



Regeln für Vektorprodukte

$\vec{a} \parallel \vec{b} \implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \implies |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$

Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\big(\vec{b} \times \vec{a}\big)$$

Linearität

$$\begin{aligned} &\big(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2\big) \times \big(\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2\big) = \\ &\quad \alpha_1\beta_1\big(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\big) + \alpha_1\beta_2\big(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2\big) + \alpha_2\beta_1\big(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1\big) + \alpha_2\beta_2\big(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2\big) \end{aligned}$$

Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Epsilon-Tensor

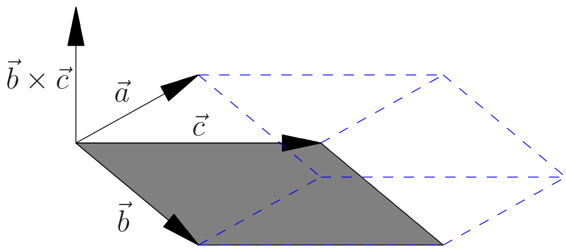
$$\varepsilon_{i,j,k} \in \{-1, 0, 1\}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

Null bei zwei gleichen Indizes,
positiv bei zyklischer Permutation der kanonischen Indexfolge $(i, j, k) = (1, 2, 3)$,
Vorzeichenänderung bei Vertauschung von Indizes.

Spatprodukt

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) =$$
$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

orientiertes Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Spats
positiv bei Orientierung der Vektoren gemäß der Rechten-Hand-Regel



Eigenschaften des Spatprodukts

zyklische Vertauschung

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$$

lineare Abhängigkeit

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

mit mindestens einem der Skalare α, β, γ ungleich 0

Orientierung

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

für jedes Rechtssystem

Volumen eines Tetraeders

aufspannende Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ $\rightsquigarrow$

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

Berechnung von Koordinaten mit Hilfe des Spatproduktes

$d = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0 \implies$

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

mit

$$\alpha = [\vec{x},\vec{v},\vec{w}]/d, \quad \beta = [\vec{x},\vec{w},\vec{u}]/d, \quad \gamma = [\vec{x},\vec{u},\vec{v}]/d$$