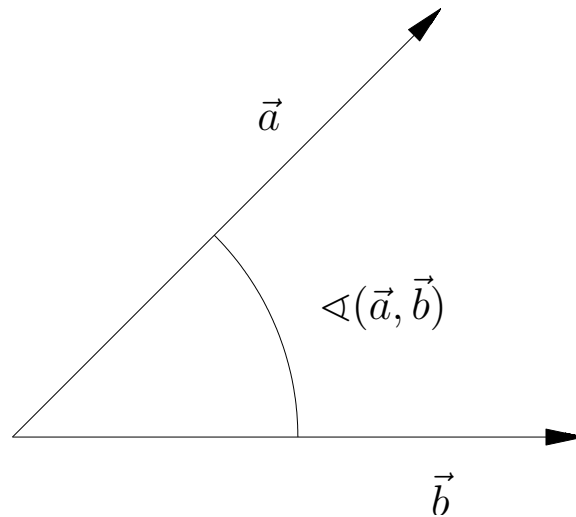


2.3 Skalarprodukt

Winkel zwischen zwei Vektoren

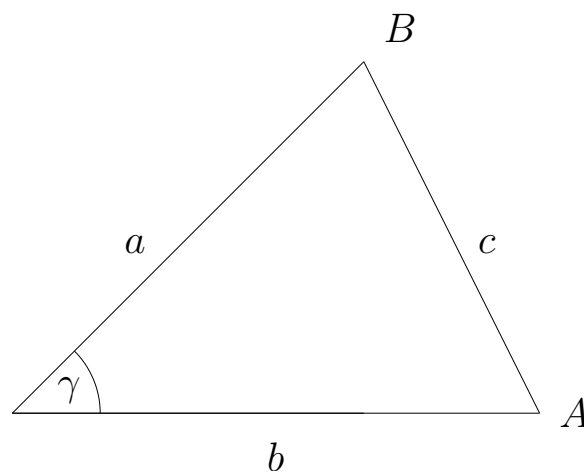
$$\gamma = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$$



orthogonal: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \gamma = \pi/2$

Kosinussatz

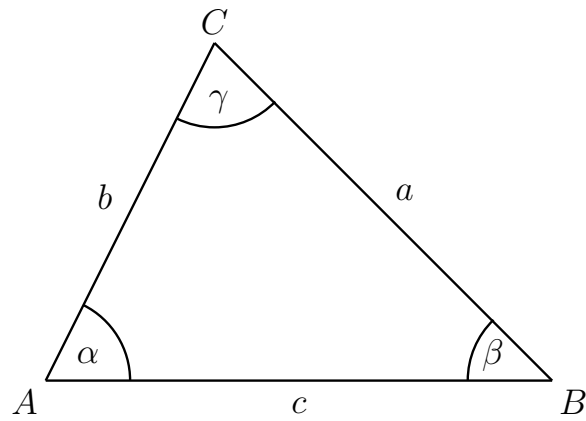
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



$\gamma = \pi/2 \rightsquigarrow$ Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Sinussatz

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$



Skalarprodukt von Vektoren im Raum

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

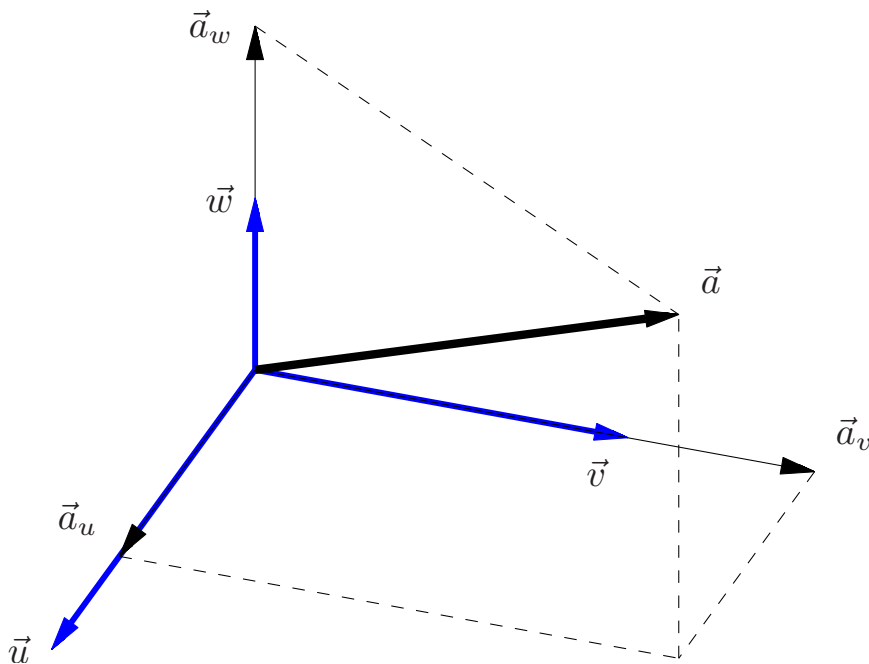
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

übliche Rechenregeln für Produkte

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad (s\vec{a} + r\vec{b}) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c}$$

Orthogonale Basis

paarweise orthogonale Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, jeweils ungleich $\vec{0}$



Zerlegung eines Vektors in Projektionen auf die Achsen

$$\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \vec{w}$$

Vereinfachung (Nenner 1) für Einheitsvektoren (Orthonormalbasis)

Satz des Pythagoras (allgemeinere Form) \rightsquigarrow

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2$$

Satz des Pythagoras

$$\vec{u} \perp \vec{v} \implies |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$