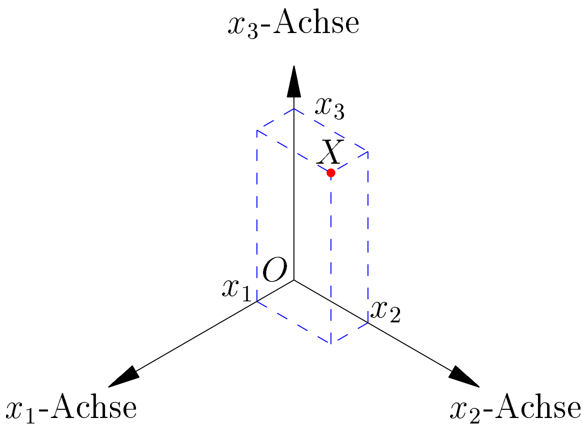
Teil 2

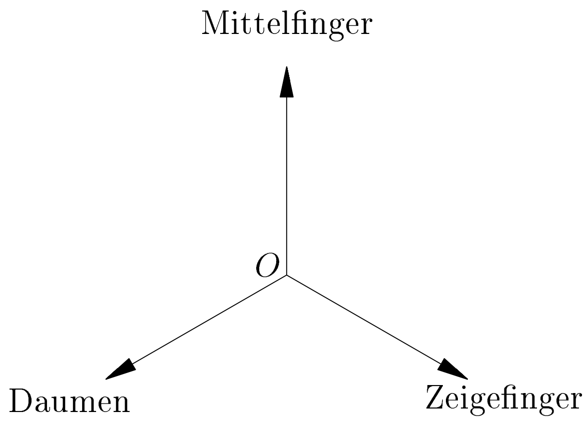
Vektorrechnung

2.1 Koordinaten

Kartesisches Koordinatensystem in der Ebene und im Raum

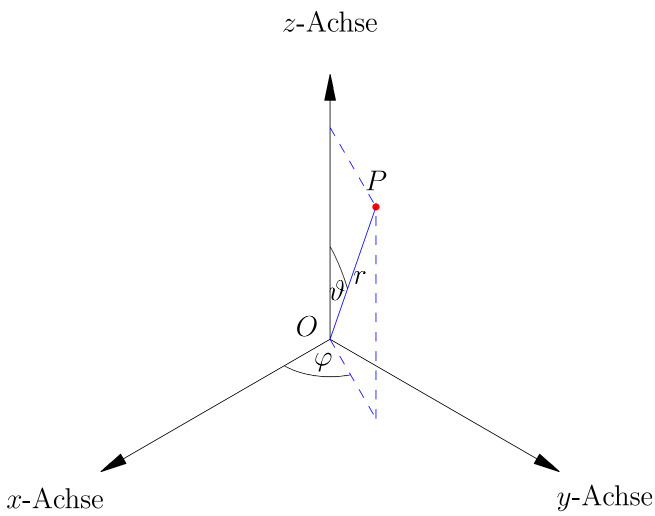
senkrecht schneidende Zahlengeraden (Achsen), orientiert gemäß der „Rechten-Hand-Regel“





Punkte, dargestellt durch Koordinaten: $X = (x_1, x_2, x_3)$ bzw. $P = (x, y, z)$

Kugelkoordinaten



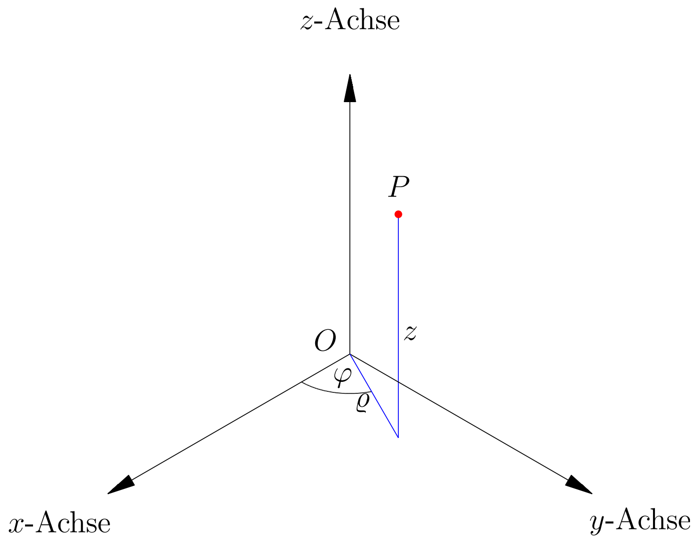
$$x = r \cos\varphi \sin\vartheta, \quad y = r \sin\varphi \sin\vartheta, \quad z = r \cos\vartheta$$

bzw.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x) + \sigma\pi, \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

mit $\sigma = 0$ für $x \geq 0$ und $\sigma = \pm 1$ für $x < 0$ $\rightsquigarrow$ Standardbereich $\varphi \in (-\pi, \pi]$

Zylinderkoordinaten



$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi, \quad z = z$$

bzw.

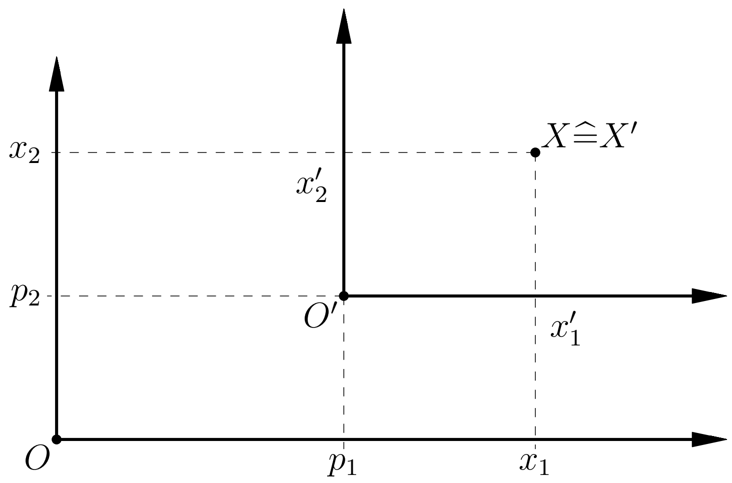
$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x) + \sigma\pi, \quad z = z$$

mit $\sigma = 0$ für $x \geq 0$ und $\sigma = \pm 1$ für $x < 0$ $\rightsquigarrow$ Standardbereich $\varphi \in (-\pi, \pi]$

Translation eines kartesischen Koordinatensystems

Verschiebung des Ursprungs, $O \to O' = (p_1, p_2, p_3)$

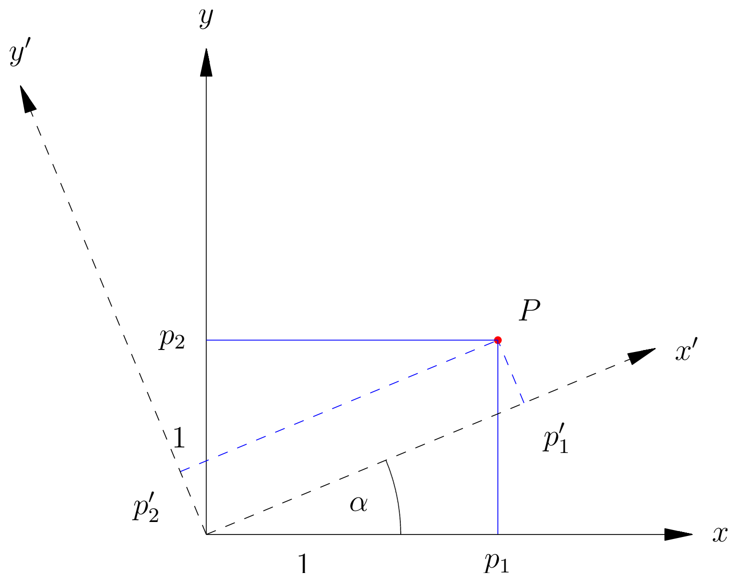
$$X = (x_1, x_2, x_3) \quad \to \quad X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3)$$



Rotation eines kartesischen Koordinatensystems

Drehung der xy-Ebene um die z-Achse mit dem Winkel α:
$P = (p_1, p_2, p_3) \to P' = (p'_1, p'_2, p'_3)$ mit

$$p'_1 = \cos\alpha\, p_1 + \sin\alpha\, p_2, \quad p'_2 = -\sin\alpha\, p_1 + \cos\alpha\, p_2, \quad p'_3 = p_3$$

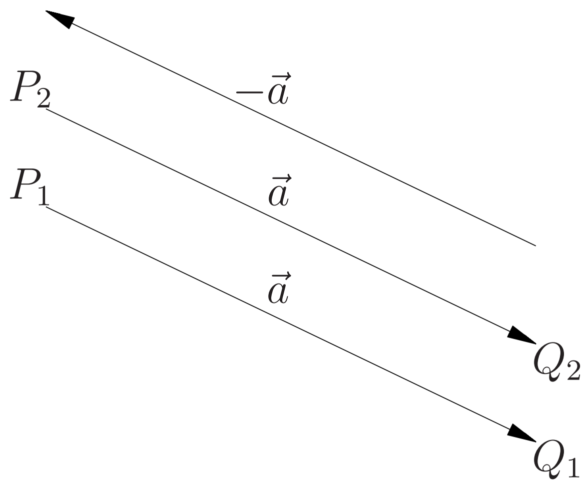

y
y'
P
p_2
x'
1
p'_1
p'_2
α
x
1
p_1

2.2 Vektoren

Vektoren

Pfeil vom Punkt P zum Punkt Q

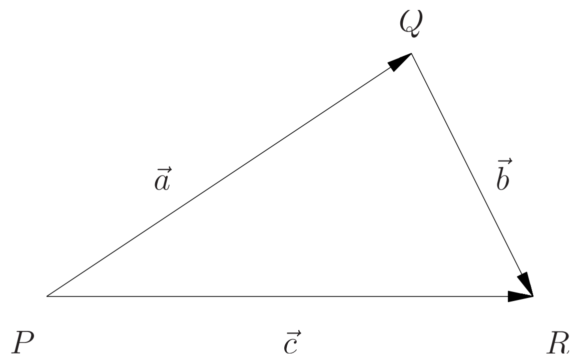
$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$



Ortsvektor: $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_2)^{\mathrm{t}}$, Nullvektor: $\vec{0}$

Addition von Vektoren

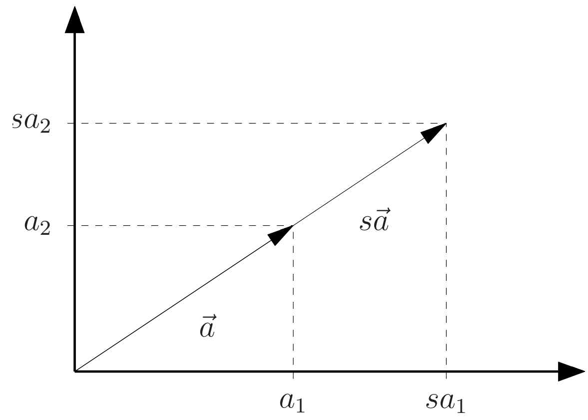
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$



$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix}$$



Betrag eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

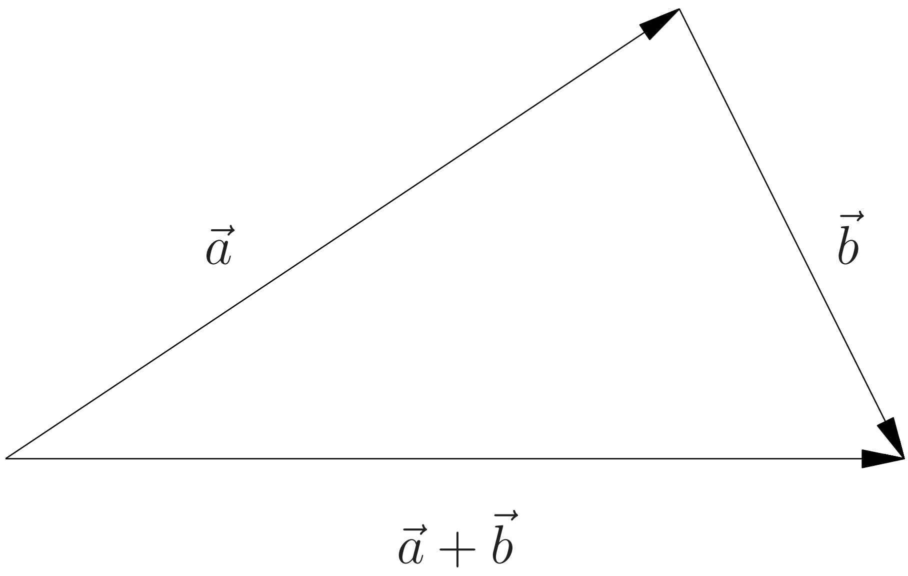
kompatibel mit Skalarmultiplikation: $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$
Einheitsvektor: Vektor mit Betrag 1

$$\vec{v}^0 = \vec{v}/|\vec{v}|$$

Dreiecksungleichung

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Gleichheit genau dann, wenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$



Rechenregeln für Vektoren

Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Assoziativgesetz

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

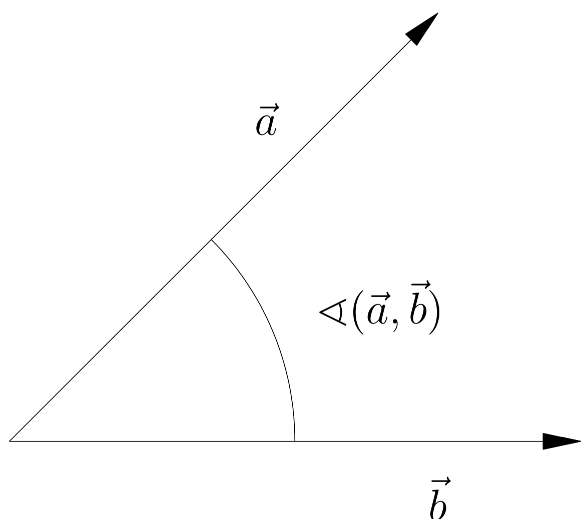
Distributivgesetz

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

2.3 Skalarprodukt

Winkel zwischen zwei Vektoren

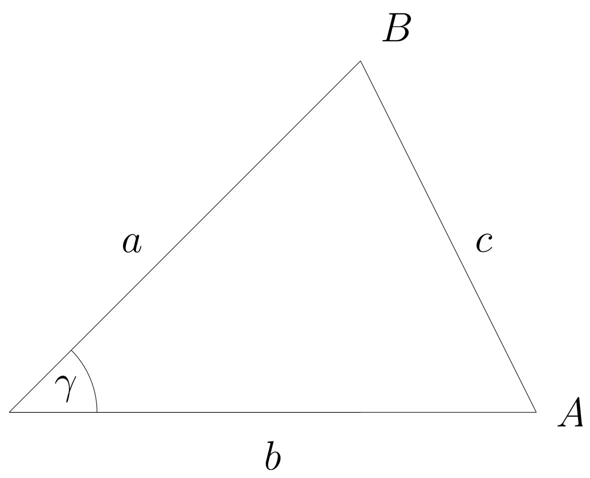
$$\gamma = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$$



orthogonal: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \gamma = \pi/2$

Kosinussatz

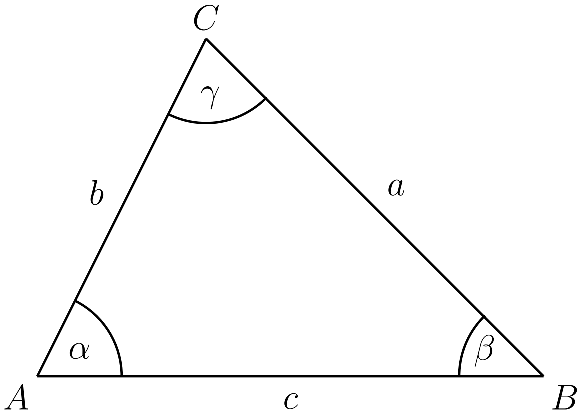
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



$\gamma = \pi/2 \rightsquigarrow$ Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Sinussatz

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



Skalarprodukt von Vektoren im Raum

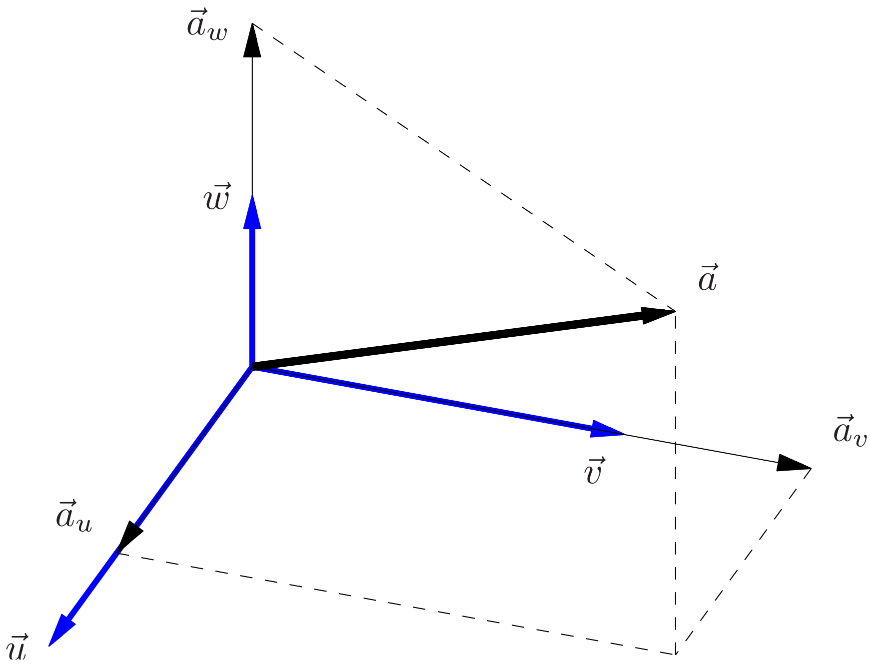
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
übliche Rechenregeln für Produkte

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad (s\vec{a} + r\vec{b}) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c}$$

Orthogonale Basis

paarweise orthogonale Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, jeweils ungleich $\vec{0}$



Zerlegung eines Vektors in Projektionen auf die Achsen

$$\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

Vereinfachung (Nenner 1) für Einheitsvektoren (Orthonormalbasis)
Satz des Pythagoras (allgemeinere Form) $\rightsquigarrow$

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2$$

Satz des Pythagoras

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$

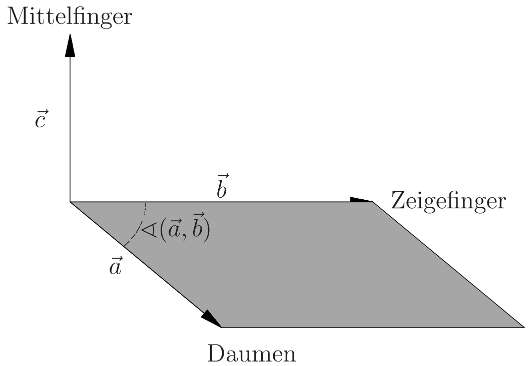
2.4 Vektorprodukt- und Spatprodukt

Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, gemäß der „Rechten-Hand-Regel“ orientiert
Länge: Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))$$



Regeln für Vektorprodukte

$\vec{a} \parallel \vec{b} \implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
$\vec{a} \perp \vec{b} \implies |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$
Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\big(\vec{b} \times \vec{a}\big)$$

Linearität

$$\begin{aligned}&\big(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2\big) \times \big(\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2\big) = \\ &\quad \alpha_1\beta_1\big(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\big) + \alpha_1\beta_2\big(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2\big) + \alpha_2\beta_1\big(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1\big) + \alpha_2\beta_2\big(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2\big)\end{aligned}$$

Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a}$$

Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Epsilon-Tensor

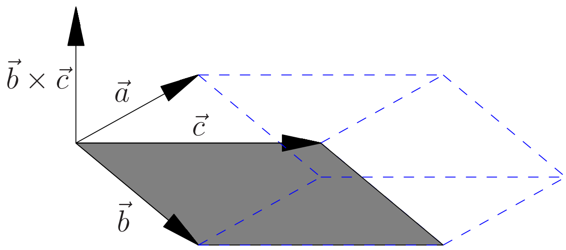
$$\varepsilon_{i,j,k} \in \{-1, 0, 1\}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

Null bei zwei gleichen Indizes,
positiv bei zyklischer Permutation der kanonischen Indexfolge $(i, j, k) = (1, 2, 3)$,
Vorzeichenänderung bei Vertauschung von Indizes.

Spatprodukt

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \\ a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

orientiertes Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Spats
positiv bei Orientierung der Vektoren gemäß der Rechten-Hand-Regel



Eigenschaften des Spatprodukts

zyklische Vertauschung

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$$

lineare Abhängigkeit

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

mit mindestens einem der Skalare α, β, γ ungleich 0

Orientierung

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

für jedes Rechtssystem

Volumen eines Tetraeders

aufspannende Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ $\rightsquigarrow$

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

Berechnung von Koordinaten mit Hilfe des Spatproduktes

$d = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0 \implies$

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

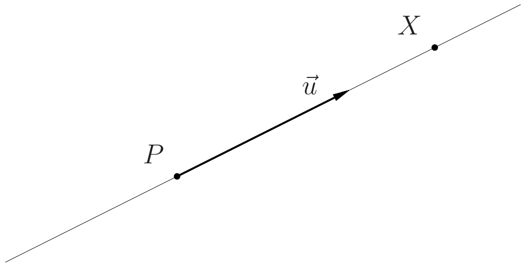
mit

$$\alpha = [\vec{x},\vec{v},\vec{w}]/d, \quad \beta = [\vec{x},\vec{w},\vec{u}]/d, \quad \gamma = [\vec{x},\vec{u},\vec{v}]/d$$

2.5 Geraden

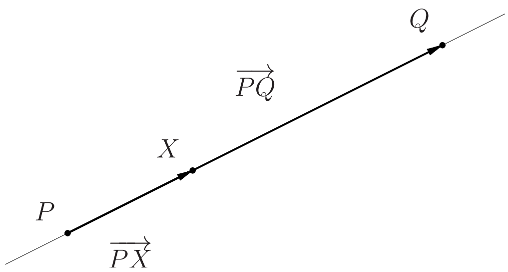
Punkt-Richtungs-Form

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = p_i + tu_i$$



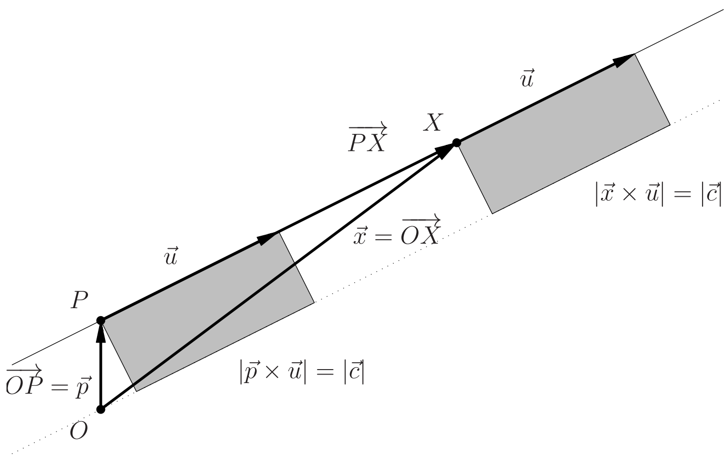
Zwei-Punkte-Form

$$\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = p_i + t(q_i - p_i)$$



Momentenform

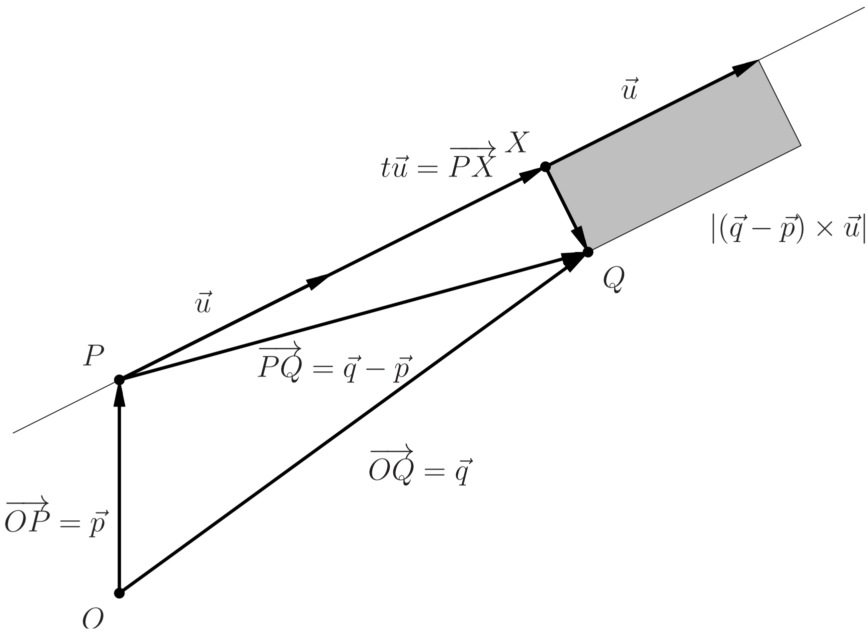
$$\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \times \vec{u} = \vec{p} \times \vec{u}$$



Abstand Punkt-Gerade

Projektion X eines Punktes Q auf eine Gerade durch P mit Richtung $\vec{u}$

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}$$



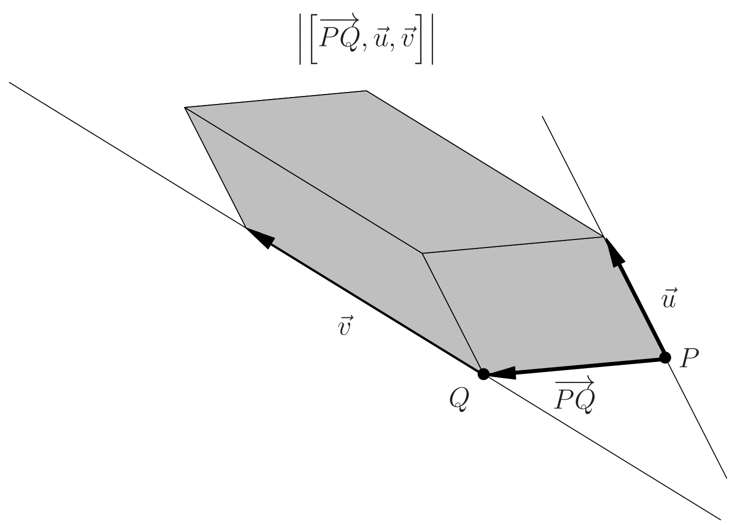
Abstand

$$d = |\overrightarrow{XQ}| = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand zweier Geraden

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Geraden gegeben durch Punkte P, Q und Richtungen $\vec{u} \nparallel \vec{v}$
windschief: $d > 0$



Abstand paralleler Geraden

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Berechnung der Punkte X, Y kürzesten Abstandes aus den Orthogonalitätsbedingungen

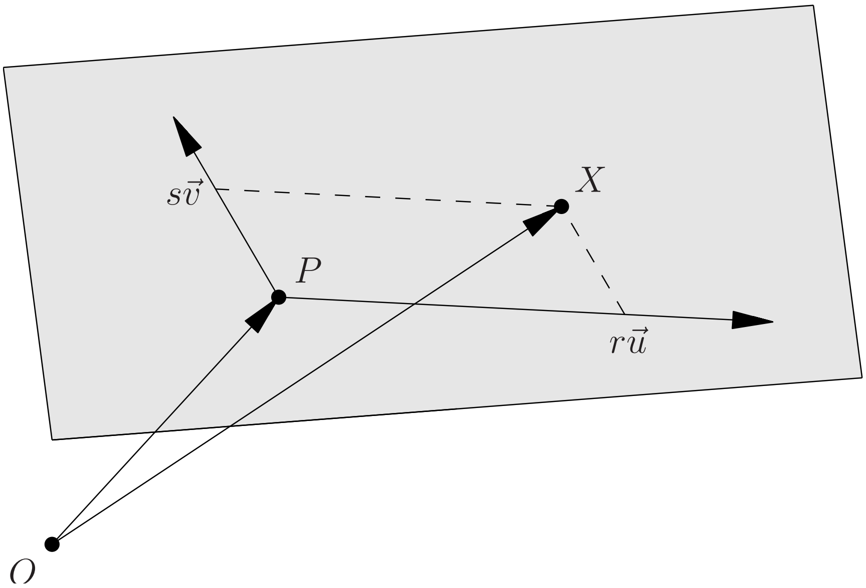
$$\vec{x} - \vec{y} \perp \vec{u}, \vec{v}, \quad \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u},\, \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

$\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem für s und t

2.6 Ebenen

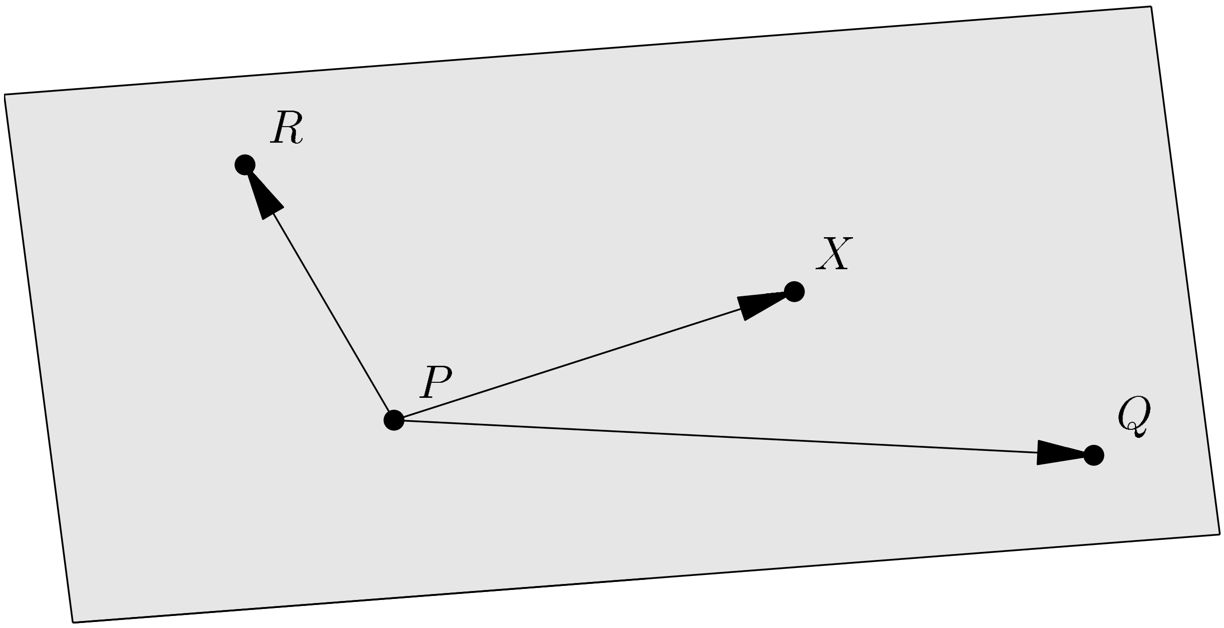
Parametrische Darstellung einer Ebene

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = p_i + su_i + tv_i$$



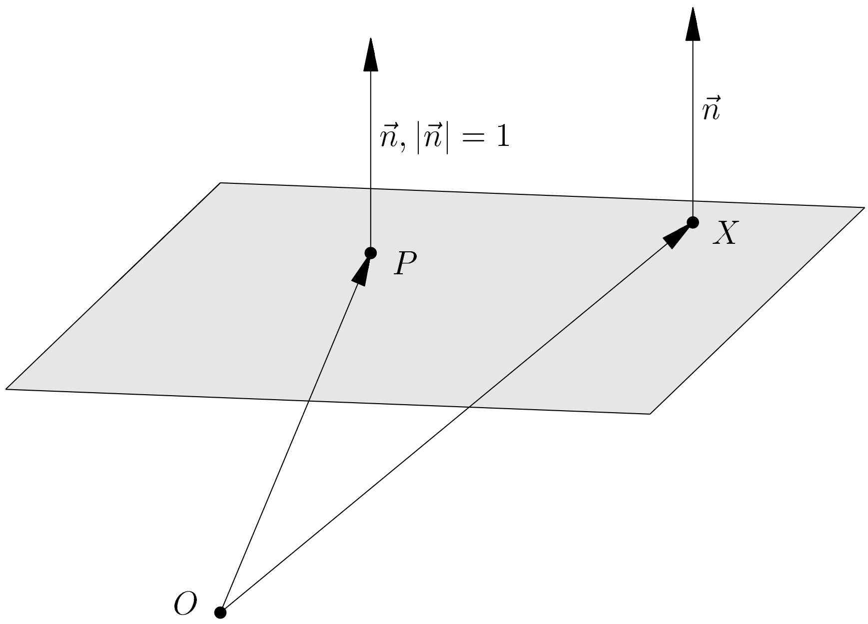
Drei-Punkte-Form einer Ebene

$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = 0 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



Hesse-Normalform einer Ebene

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = d, \quad d = \vec{p} \cdot \vec{n}$$

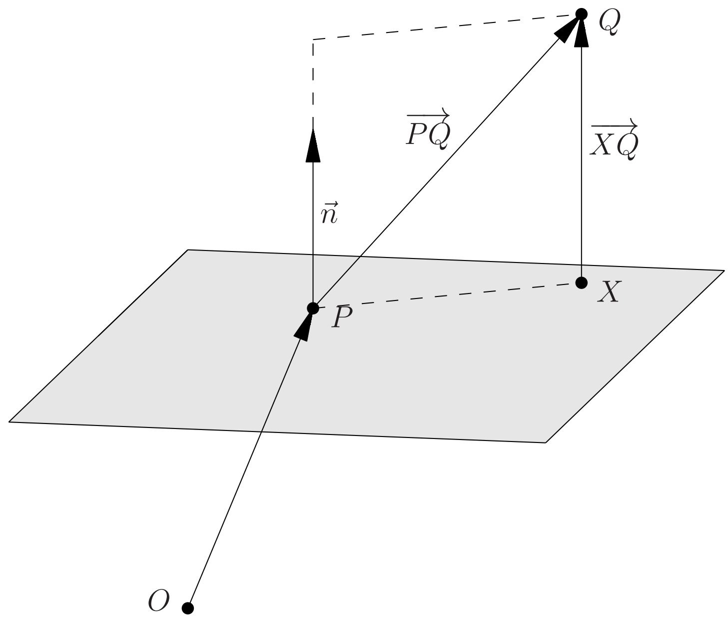


Normalform: $|\vec{n}| = 1$ und $d \geq 0$ ist der Abstand der Ebene zum Ursprung

Abstand Punkt-Ebene

Abstand von Q

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

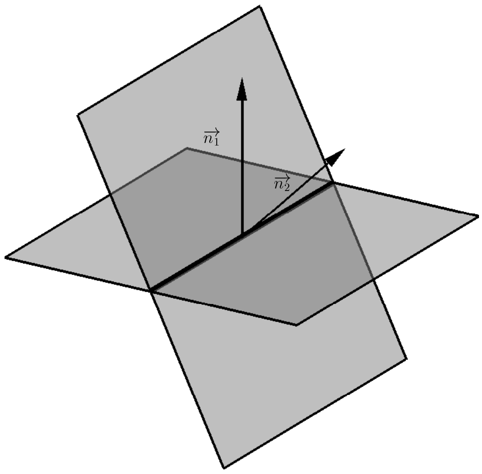


Projektion von Q

$$\vec{x} = \vec{q} - \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

Schnitt zweier Ebenen

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} \in [0, \pi/2]$$



Richtung der Schnittgeraden g: $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$
gemeinsame Lösungen beider Ebenengleichungen $\rightsquigarrow$ Punkte P auf g

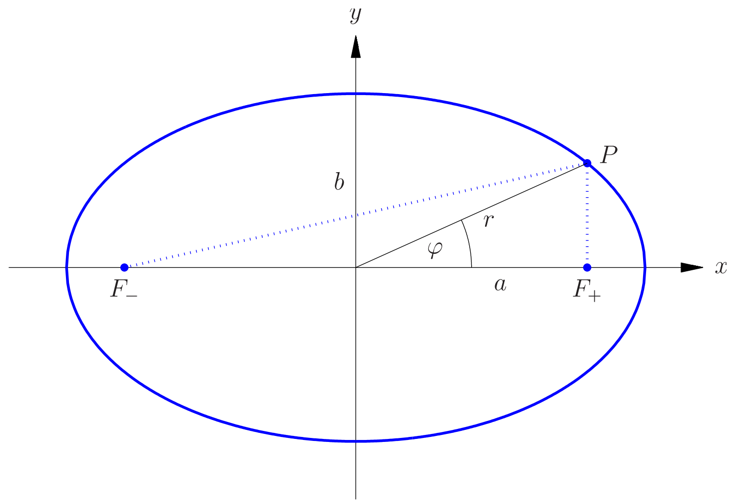
2.7 Quadratische Kurven

Ellipse

Punkte $P = (x, y)$ mit konstanter Abstandssumme zu zwei Brennpunkten $F_\pm$

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

mit $2a > |\overrightarrow{F_-F_+}|$



$F_\pm = (\pm f, 0) \rightsquigarrow$ Koordinatendarstellung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

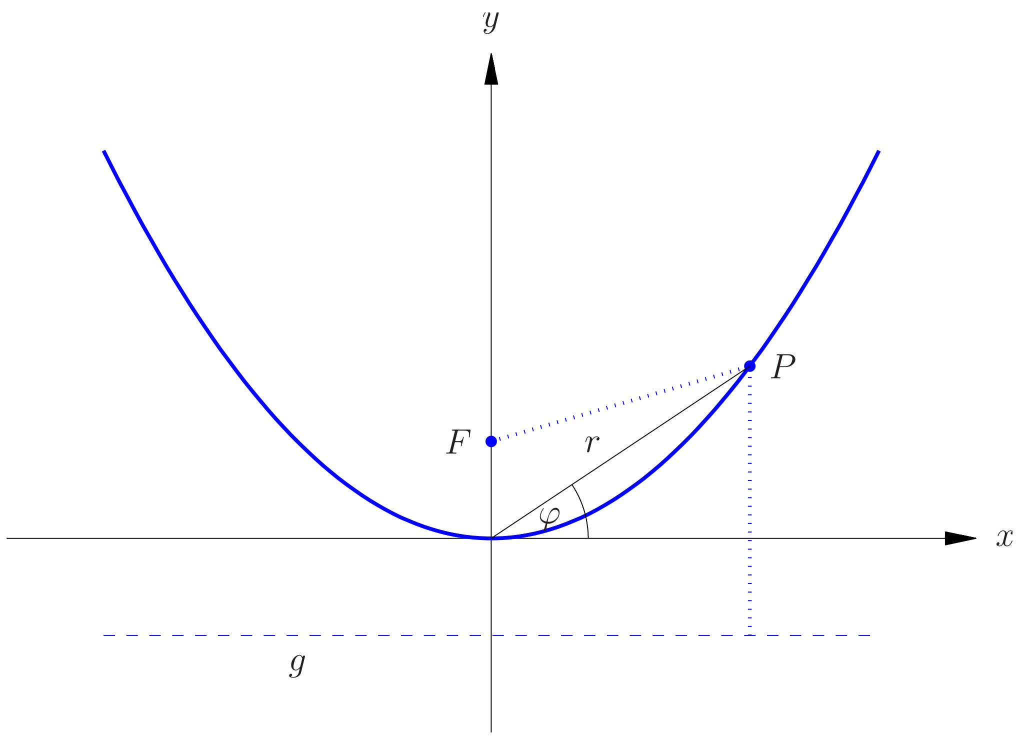
für die Polarkoordinaten der Punkte P

Parametrisierung

$$x = a \cos t,\ y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Parabel

Punkte $P = (x, y)$ gleichen Abstands von einem Brennpunkt F und einer Leitgerade g



$F = (0, f)$ und $g: \; y = -f \rightsquigarrow$ Koordinatendarstellung

$$4fy = x^2$$

bzw.

$$r = \frac{4f \sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

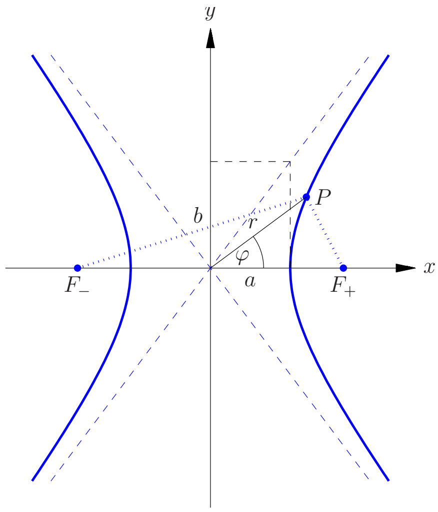
für die Polarkoordinaten der Punkte P

Hyperbel

Punkte $P = (x, y)$ mit konstanter Abstandsdifferenz zu zwei Brennpunkten $F_\pm$

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

mit $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$



$F_\pm = (\pm f, 0) \rightsquigarrow$ Koordinatendarstellung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

bzw.

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2\varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P

Parametrisierung

$$x = \pm a \cosh t, \; y = b \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}$$