## 1.5 Komplexe Zahlen

### Komplexe Zahlen

imaginäre Einheit: $\mathrm{i}^2 = -1$

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

Real- und Imaginärteil

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

### Komplexe Konjugation

konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$$

verträglich mit den arithmetischen Operationen

$$\overline{z_1 \circ z_2} = \bar{z}_1 \circ \bar{z}_2, \quad \circ = +, -, *, /$$

### Betrag komplexer Zahlen

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Positivität

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

Multiplikativität

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,\ z_2 \neq 0$$

Dreiecksungleichung

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

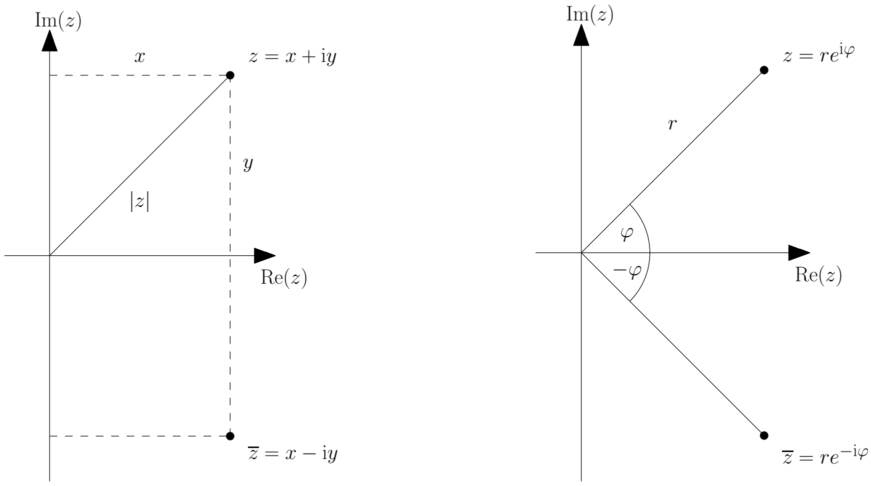
### Formel von Euler-Moivre

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Sinus und Kosinus: Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1

$$\cos t = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$
$$\sin t = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$

## Gaußsche Zahlenebene




Darstellung in Polarkoordinaten

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$$

mit

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg(z) = \arctan y/x + \sigma\pi$$

$\sigma = 0$ für $x \geq 0$, $\sigma = \pm\pi$ für $x < 0 \rightsquigarrow$ Standardbereich $\varphi \in (-\pi, \pi]$

| $z$ | $1$ | $-1$ | $\pm\mathrm{i}$ | $1 \pm \mathrm{i}$ | $\sqrt{3} \pm \mathrm{i}$ | $1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | $1$ | $1$ | $1$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | $2$ |
| $\varphi$ | $0$ | $\pi$ | $\pm\pi/2$ | $\pm\pi/4$ | $\pm\pi/6$ | $\pm\pi/3$ |

## Multiplikation komplexer Zahlen

$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k\exp(\mathrm{i}\varphi_k)$

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i} = r_1r_2\exp(\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2))$$

## Division komplexer Zahlen

$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k\exp(\mathrm{i}\varphi_k)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,\mathrm{i} = \frac{r_1}{r_2}\exp(\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2))$$

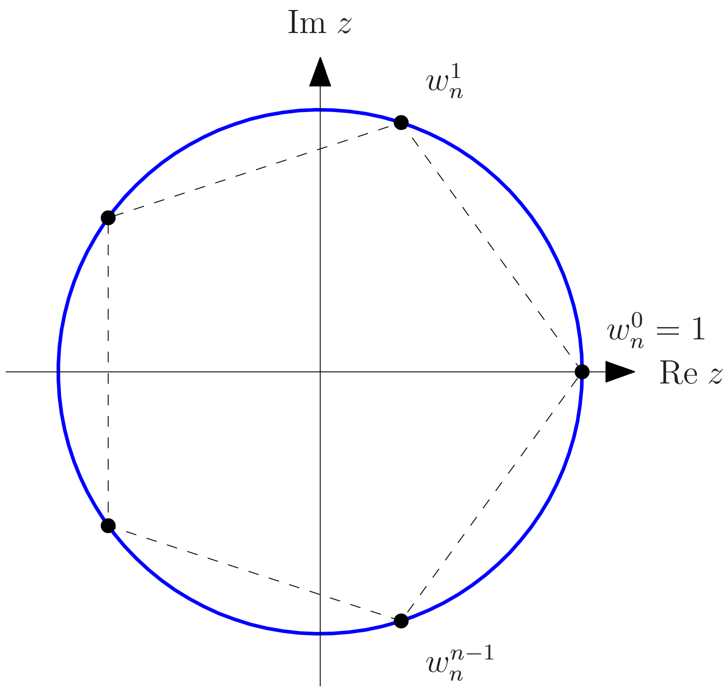
Kehrwert

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r^2}\bar{z} = \frac{1}{r}\exp(-\mathrm{i}\varphi) = \frac{x}{r^2} - \frac{y}{r^2}\,\mathrm{i}$$

**Komplexe Einheitswurzeln**

$z^n = 1$

$$z_k = w_n^k, \quad w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n), \quad k = 0, \ldots, n-1$$




**Potenzen einer komplexen Zahl**

ganzzahlige Exponenten $m \in \mathbb{Z}$

$$z^m = r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

rationale Exponenten $p/q \in \mathbb{Q}$

$$z^{p/q} = r^{p/q} \exp\left(\mathrm{i}p\varphi/q\right) w_q^{kp}, \quad k = 0, \ldots, q-1$$

mit $w_q^k = \exp\left(2\pi\mathrm{i}/q\right)^k$ den $q$-ten Einheitswurzeln

**Kreis in der Gaußschen Zahlenebene**

$$|z-a| = s|z-b|, \quad s \neq 1$$

Mittelpunkt

$$w = \frac{1}{1-s^2}a - \frac{s^2}{1-s^2}b$$

Radius

$$r = \frac{s}{|1-s^2|}|b-a|$$

Parameterform des Kreises

$$w + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, 2\pi)$$