## 1.4 Kombinatorik

**Fakultät**

Anzahl der Permutationen von $n$ Elementen

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

Stirlingsche Formel

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \big(1 + O(1/n)\big)$$

**Binomialkoeffizient**

Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer Menge mit $n$ Elementen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}$$

**Pascalsches Dreieck**

Rekursion für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$\rightsquigarrow$ Dreiecksschema

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & 1 & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & 1 & & 1 & & & \\
\binom{2}{k} & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
\binom{3}{k} & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
\binom{4}{k} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

**Binomischer Satz**

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
\end{aligned}$$

**Identitäten für Binomialkoeffizienten**

$$
\begin{aligned}
2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
0 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1 \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{k-1}, \quad k > 0
\end{aligned}
$$

**Auswahl von Teilmengen**

Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit $n$ verschiedenen Elementen $k$ Elemente auszuwählen

| | nicht sortiert | sortiert |
|---|---|---|
| ohne Wiederholungen | $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ | $\binom{n}{k}$ |
| mit Wiederholungen | $n^k$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |