1.1 Aussagenlogik

Aussage und Axiom

Aussage: sprachlicher Ausdruck mit eindeutigem Wahrheitswert w („wahr“) bzw. f („falsch“)

$$A: \quad \text{Beschreibung}$$

Axiom: grundlegende nicht aus anderen Aussagen ableitbare Aussage

Logische Operationen

Negation	$\neg A$	nicht A
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
Disjunktion	$A \vee B$	A oder B
Implikation	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent zu B

Umformungsregeln für logische Operationen

Assoziativgesetze

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze

$$A \wedge B = B \wedge A, \quad A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B), \quad \neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C), \quad (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

äquivalente Darstellung der Implikation: $\neg A \vee B$

Quantoren

Existenzquantor und Allquantor

$$\exists\text{: „es gibt \ldots“}, \quad \forall\text{: „für alle \ldots“}$$

Negation $\rightsquigarrow$ Vertauschung der Quantoren

$$\begin{aligned} \neg\big(\exists\, p \in P: \; A(p)\big) &= \forall\, p \in P: \; \neg A(p) \\ \neg\big(\forall\, p \in P: \; A(p)\big) &= \exists\, p \in P: \; \neg A(p) \end{aligned}$$

Direkter Beweis

Herleitung einer Behauptung B aus bekannten wahren Aussagen A

$$A \Longrightarrow B$$

gegebenenfalls Berücksichtigung von Voraussetzungen

Indirekter Beweis

Herleitung einer Aussage B aus Voraussetzungen V durch Folgern eines Widerspruchs aus der Annahme, dass die Aussage B bei Gültigkeit der Voraussetzungen V falsch ist:

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

mit einer falschen Aussage F, insbesondere $F = \neg V$ oder $F = B$

Vollständige Induktion

Beweis von parameterabhängigen Aussagen $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$

- Induktionsanfang: zeige $A(1)$
- Induktionsschluss: zeige $A(n) \implies A(n+1)$