11.7 Differentialgleichungen

Regulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von $a \implies$

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

regulär bei $z = a$

regulär bei $z = a \implies$ eindeutige, in einer Umgebung von a analytische Lösung zu beliebigen Anfangswerten $u(a) = u_0$, $u'(a) = u_1$

Konstruktion durch Koeffizientenvergleich

Singulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

q/r Pol höchstens erster und p/r Pol höchstens zweiter Ordnung bei $z = a \implies$

$z = a$ regulärer singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

charakteristische Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$$

mit

$$\frac{q(z)}{r(z)} = \frac{q_0 + q_1(z-a) + \cdots}{z-a}, \quad \frac{p(z)}{r(z)} = \frac{p_0 + p_1(z-a) + \cdots}{(z-a)^2}$$

Differenz der Nullstellen α, β von φ nicht ganzzahlig $\implies$

$\exists$ zwei linear unabhängige Lösungen

$$(z-a)^\alpha v(z), \quad (z-a)^\beta w(z)$$

mit v und w in einer Umgebung von a analytisch und $v(a), w(a) \neq 0$

$\alpha - \beta \in \mathbb{Z} \implies$ i.a. nur eine Lösung obigen Typs zu dem Exponenten α mit dem größten Realteil

zweite Lösung durch Variation der Konstanten, d.h. mit dem Ansatz

$$u(z) = c(z)(z-a)^\alpha v(z)$$

Bessel-Differentialgleichung

$$z^2u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0$$

für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ zwei linear unabhängige Lösungen

$$J_{\pm\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

für $\alpha \in \mathbb{Z}$ nur eine Lösung obigen Typs für den positiven Index

spezielle Bessel-Funktionen

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

und

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}, \qquad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}$$

Hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0$$

reguläre Singularitäten bei $z = 0, 1, \infty$

analytische Lösung für $-c \notin \mathbb{N}_0$

$$u(z) = F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n$$

mit $(t)_0 = 1$ und $(t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$ für $n \geq 1$