11.6 Potenzreihen

Komplexes Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j$$

Integraldarstellung des Restglieds

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)}\, dw \right) (z-a)^{n+1}$$

mit C einem geschlossenen Weg mit $n(C, a) = 1$

(z. B. ein entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a)

$\rightsquigarrow$ Approximation mit Ordnung $n+1$: $|f(z) - p_n(z)| = O\left(|z-a|^{n+1}\right)$, $z \to a$

Komplexe Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

absolute Konvergenz für

$$|z-a| < r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| f^{(n)}(a)/n! \right|^{1/n} \right)^{-1}$$

Konvergenzradius r: Abstand des Entwicklungspunktes a zur nächsten Singularität von f, d.h. zum Rand des Analytizitätsgebietes

Methoden der Taylor-Entwicklung

- direkte Berechnung der Ableitungen im Entwicklungspunkt
- gliedweise Differentiation oder Integration
- Koeffizientenvergleich
- Produktbildung durch gliedweise Multiplikation
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument

Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

für eine in einem Kreisring $D:\ r_1 < |z-a| < r_2$ analytische Funktion

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

mit $C \subset D$ einem beliebigen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um a

Methoden der Laurent-Entwicklung

- direkte Berechnung der Koeffizienten
- gliedweise Differentiation oder Integration bekannter Reihen
- Koeffizientenvergleich
- Summe oder Produkte bekannter Reihen
- Substitution $z \to \frac{1}{z-a}$ in bekannten Taylor-Reihen
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument