11.5 Residuenkalkül

Residuum

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_a f = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C f(z)\, dz$$

für eine in einer punktierten Kreisscheibe $D\backslash\{a\}$ analytische Funktion f und jeden geschlossenen Weg $C \subset D\backslash\{a\}$ mit $n(C, a) = 1$

(z. B. einem entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis)

$\operatorname*{Res}_a f = c_{-1}$ für

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z), \quad |g(z)| = O(1) \,\text{für}\, z \to a$$

(Polstelle) oder für

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

(Laurent-Entwicklung in der Umgebung einer wesentlichen Singularität)

Berechnung von Residuen

$$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

für eine einfache Polstelle bei a

$$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z-a)^n f(z)) \right]$$

für eine Polstelle n-ter Ordnung bei a

Residuensatz

$$\int\limits_C f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{a_j} f$$

C: entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D

f: in $\overline{D}$ stetig und in D bis auf endlich viele Singularitäten a_j analytisch

Trigonometrische Integranden

$$\int\limits_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t)\, dt, \quad r: \text{ rationale Funktion}$$

Substitution

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right), \quad dz = \mathrm{i}z\, dt$$

$\rightsquigarrow$

$$\int\limits_C f(z)\,dz, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}, \quad C:\,|z|=1$$

Residuensatz $\implies$

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{|a|<1}\operatorname*{Res}_a f$$

Rationale Integranden

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}\,a>0}\operatorname*{Res}_a f$$

f: rationale Funktion ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad um mindestens 2 kleiner als der Nennergrad

alternativ: $= -2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}\,a<0}\operatorname*{Res}_a f$

Transzendente Integranden

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}\,a>0}\operatorname*{Res}_{z=a}\left(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\right), \quad \lambda\in\mathbb{R}^+$$

für eine rationale Funktion f ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad kleiner als der Nennergrad

Summation der Residuen in der unteren Halbebene für $\lambda < 0$