11.4 Eigenschaften analytischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\, dt$$

für eine auf einer Kreisscheibe mit Radius $> r$ um z analytische Funktion f

Identität gültig ebenfalls für Real- und Imaginärteil sowie für harmonische Funktionen

Maximumprinzip

f analytisch in D, stetig auf $\overline{D} \implies$

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

Abschätzungen für komplexe Ableitungen

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z|=r} |f(w)|$$

für eine auf einer Kreisscheibe mit Radius $> r$ um z analytische Funktion f

Satz von Liouville

f analytisch und beschränkt auf $\mathbb{C} \implies f$ konstant

Fundamentalsatz der Algebra

Existenz einer Nullstelle in $\mathbb{C}$ für jedes nicht konstante Polynom p

$\rightsquigarrow$ Faktorisierung

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n), \quad n = \operatorname{Grad} p$$