## 11.3 Komplexe Integration

### Integral einer komplexen Funktion

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,dt, \quad f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$$

$\int$ ... linear und additiv und durch

$$\left|\int f\right| \le \int |f|$$

abschätzbar

### Komplexes Kurvenintegral

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt, \quad C: t \mapsto z(t)$$

bei gleichbleibender Orientierung unabhängig von der Parametrisierung

bei Umkehrung der Durchlaufrichtung Änderung des Vorzeichens

### Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals

linear bezüglich des Integranden

$$\int_C rf + sg\,dz = r\int_C f\,dz + s\int_C g\,dz$$

additiv bezüglich des Integrationsweges

$$\int_C f\,dz = \int_{C_1} f\,dz + \int_{C_2} f\,dz, \quad C = C_1 + C_2$$

insbesondere: $\int_C f\,dz = -\int_{-C} f\,dz$ mit $-C$ dem in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weg $C$

### Stammfunktion

$$\int_C f'\,dz = f(z_1) - f(z_0)$$

für einen von $z_0$ nach $z_1$ verlaufenden Weg $C$

$\rightsquigarrow$ Wegunabhängigkeit und Verschwinden des Kurvenintegrals für geschlossene Wege

**Singularitäten einer komplexen Funktion**

- schwache Singularität:

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$$

  (aufgrund der Cauchyschen Integralformel immer hebbar)

- Pol $n$-ter Ordnung:

$$|(z-a)^n f(z)| = O(1), \quad z \to a,$$

  $n > 0$ minimal

- wesentliche Singularität:

$$(z-a)^n f(z) \neq O(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Homotopie von Kurven**

Abbildung

$$[0,1]^2 \ni (s,t) \mapsto z(s,t) \in D\,,$$

die die Kurven $t \mapsto z(k,t)$, $k = 0, 1$, in einem Gebiet $D$ stetig ineinander überführt

$z(1,t) = p$: Homotopie zu einem Punkt $p$

**Cauchys Theorem**

$$\int_C f\,dz = 0$$

$f$: bis auf endlich viele schwache Singularitäten im Gebiet $D$ analytisch
$C$: geschlossen, in $D$ zu einem Punkt homotop

**Umlaufzahl**

$$n(C,a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{dz}{z-a}$$

für einen geschlossenen Weg $C$

**Cauchysche Integralformel**

$$n(C,z)\,f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad z \in D$$

$f$: analytisch in $D$

$C$: geschlossen, in $D$ zu einem Punkt homotop

$n(C,z) = 1$ für einen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um $z$

**Integralformel für Ableitungen einer komplexen Funktion**

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

$f$: analytisch in $D$

$C$: geschlossenen mit $n(C,z) = 1$, in $D$ zu einem Punkt homotop