## 11.2 Komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

**Komplexe Differenzierbarkeit**

$$f'(z) = \lim_{|\Delta z| \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Grenzwert unabhängig von der Folge $\Delta z$

komplex differenzierbar oder analytisch in einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C} \Leftrightarrow$
$f'(z)$ existiert für alle $z \in D$

**Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen**

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \quad z = x + \mathrm{i}y$$

komplex differenzierbar $\Leftrightarrow$ $f(x, y) = (u, v)^t$ total differenzierbar und

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

äquivalente Ausdrücke für die Ableitung

$$f' = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y$$

sowohl $u$ als auch $v$ harmonisch, d.h.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 = \Delta v$$

**Konjugiert harmonische Funktion**

$\Delta u = 0 \implies \exists$ komplex differenzierbare Funktion (komplexes Potential)

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), \quad z = x + \mathrm{i}y$$

$v = \operatorname{Im} f$: konjugiert harmonische Funktion

**Konforme Abbildung**

$f$ komplex differenzierbar und injektiv $\rightsquigarrow$
isotrope und winkeltreue Abbildung $z \mapsto w = f(z)$

Kettenregel $\implies$

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$$

für die Tangenten an Kurven $z(t)$ und $w(t) = f(z(t))$

Streckung um den Faktor $|f'(z_0)|$ und Drehung um den Winkel $\arg(f'(z_0))$

Invarianz von Schnittwinkeln

**Elementare konforme Abbildungen**

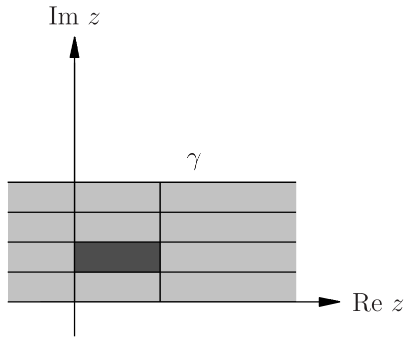
$w = \mathrm{e}^z$ bildet den Streifen

$$z: \; 0 < \operatorname{Im} z < \gamma$$

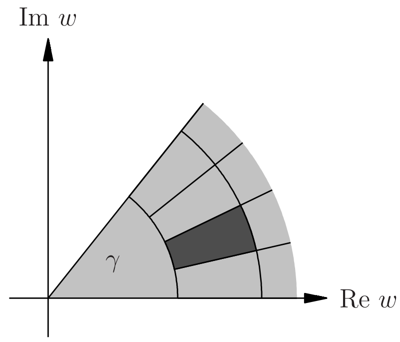
mit $\gamma \leq 2\pi$ auf den Sektor

$$w: \; 0 < \arg w < \gamma$$

ab




$z$-Ebene




$w$-Ebene

$z = \operatorname{Ln} w$ bildet Sektoren auf Streifen ab

**Hauptsatz über konforme Abbildungen**

Existenz konformer Abbildungen $f$ auf die Einheitskreisscheibe für jedes einfach zusammenhängende, echte Teilgebiet der komplexen Ebene

Bedingungen

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0$$

legen $f$ eindeutig fest