11.1 Komplexe Funktionen

Gebiet

zusammenhängende offene Teilmenge D des $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$

Rand ∂D genügend glatt; i.a. lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellbar

Komplexe Funktion

$$\mathbb{C} \supseteq D \ni z \mapsto w = f(z) \in \mathbb{C}$$

reelle Darstellung

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \quad z = x + \mathrm{i}y$$

Möbius-Transformation

$$f:\ z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

Umkehrabbildung

$$w \mapsto z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Invarianz von Kreisen (gegebenenfalls als Geraden entartet)

eindeutig durch Bilder w_j von drei Punkten z_j bestimmt und mit Hilfe des Doppelverhältnisses darstellbar

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \quad z = x + \mathrm{i}y$$

2π-periodisch bzgl. y

Streifen $\operatorname{Im} z \in [s, s+2\pi)$	$\to$	gelochte Gauß-Ebene $\mathbb{C}\backslash\{0\}$
horizontale Geraden $z = t + \mathrm{i}y$, $t \in \mathbb{R}$	$\to$	Halbgeraden $w = s\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$, $s \in \mathbb{R}^+$
vertikale Geraden $z = x + \mathrm{i}t$, $t \in \mathbb{R}$	$\to$	Kreise $\lvert w\rvert = \mathrm{e}^x$

Komplexer Logarithmus

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $z = \exp(w)$

Polardarstellung $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg(z) \rightsquigarrow$

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln(r) + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$

Standardbereich (Hauptzweig)

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

singularitätenfreie Definition der Logarithmusfunktion nur auf Gebieten, die weder 0 noch eine geschlossene Kurve um 0 enthalten, möglich

Potenzen einer komplexen Zahl

ganzzahlige Exponenten $m \in \mathbb{Z}$

$$z^m = r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

rationale Exponenten $p/q \in \mathbb{Q}$

$$z^{p/q} = r^{p/q} \exp\left(\mathrm{i}p\varphi/q\right) w_q^{kp}, \quad k = 0, \ldots, q-1$$

mit $w_q^k = \exp\left(2\pi\mathrm{i}/q\right)^k$ den q-ten Einheitswurzeln