

Teil 11

Komplexe Analysis

11.1 Komplexe Funktionen

Gebiet

zusammenhängende offene Teilmenge D des \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n

Rand ∂D genügend glatt; i.a. lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellbar

Komplexe Funktion

$$\mathbb{C} \supseteq D \ni z \mapsto w = f(z) \in \mathbb{C}$$

reelle Darstellung

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

Möbius-Transformation

$$f : z \mapsto w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

Umkehrabbildung

$$w \mapsto z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Invarianz von Kreisen (gegebenenfalls als Geraden entartet)

eindeutig durch Bilder w_j von drei Punkten z_j bestimmt und mit Hilfe des Doppelverhältnisses darstellbar

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy$$

2π -periodisch bzgl. y

Streifen $\text{Im } z \in [s, s + 2\pi)$ \rightarrow gelochte Gauß-Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

horizontale Geraden $z = t + iy, t \in \mathbb{R}$ \rightarrow Halbgeraden $w = se^{iy}, s \in \mathbb{R}^+$

vertikale Geraden $z = x + it, t \in \mathbb{R}$ \rightarrow Kreise $|w| = e^x$

Komplexer Logarithmus

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $z = \exp(w)$

Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg(z) \rightsquigarrow$

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln(r) + i(\varphi + 2\pi k) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$

Standardbereich (Hauptzweig)

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

singularitätenfreie Definition der Logarithmusfunktion nur auf Gebieten, die weder 0 noch eine geschlossene Kurve um 0 enthalten, möglich

Potenzen einer komplexen Zahl

ganzzahlige Exponenten $m \in \mathbb{Z}$

$$z^m = r^m e^{im\varphi}, \quad z = re^{i\varphi}$$

rationale Exponenten $p/q \in \mathbb{Q}$

$$z^{p/q} = r^{p/q} \exp(ip\varphi/q) w_q^{kp}, \quad k = 0, \dots, q-1$$

mit $w_q^k = \exp(2\pi i k/q)$ den q -ten Einheitswurzeln

11.2 Komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Komplexe Differenzierbarkeit

$$f'(z) = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Grenzwert unabhängig von der Folge Δz

komplex differenzierbar oder analytisch in einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C} \Leftrightarrow$

$f'(z)$ existiert für alle $z \in D$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

komplex differenzierbar $\Leftrightarrow f(x, y) = (u, v)^t$ total differenzierbar und

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

äquivalente Ausdrücke für die Ableitung

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

sowohl u als auch v harmonisch, d.h.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 = \Delta v$$

Konjugiert harmonische Funktion

$\Delta u = 0 \implies \exists$ komplex differenzierbare Funktion (komplexes Potential)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

$v = \text{Im } f$: konjugiert harmonische Funktion

Konforme Abbildung

f komplex differenzierbar und injektiv \rightsquigarrow

isotrope und winkeltreue Abbildung $z \mapsto w = f(z)$

Kettenregel \implies

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$$

für die Tangenten an Kurven $z(t)$ und $w(t) = f(z(t))$

Streckung um den Faktor $|f'(z_0)|$ und Drehung um den Winkel $\arg(f'(z_0))$

Invarianz von Schnittwinkeln

Elementare konforme Abbildungen

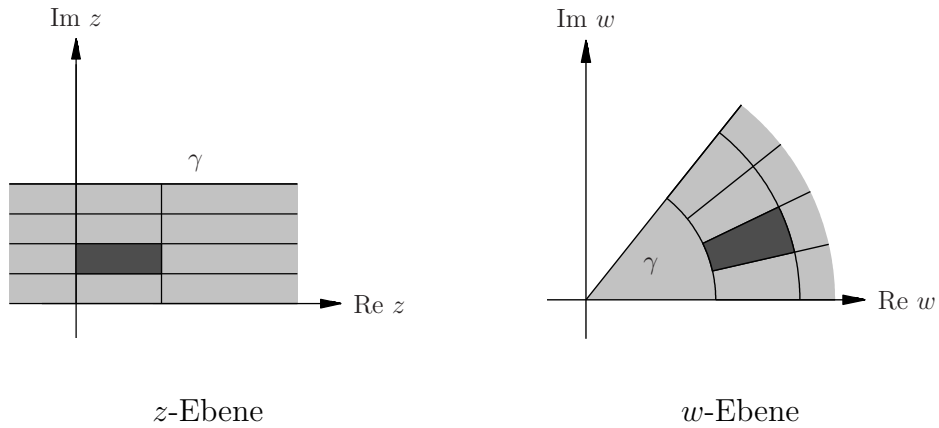
$w = e^z$ bildet den Streifen

$$z : 0 < \operatorname{Im} z < \gamma$$

mit $\gamma \leq 2\pi$ auf den Sektor

$$w : 0 < \arg w < \gamma$$

ab



$z = \operatorname{Ln} w$ bildet Sektoren auf Streifen ab

Hauptsatz über konforme Abbildungen

Existenz konformer Abbildungen f auf die Einheitskreisscheibe für jedes einfach zusammenhängende, echte Teilgebiet der komplexen Ebene

Bedingungen

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0$$

legen f eindeutig fest

11.3 Komplexe Integration

Integral einer komplexen Funktion

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt, \quad f(t) = u(t) + iv(t)$$

\int ... linear und additiv und durch

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

abschätzbar

Komplexes Kurvenintegral

$$\int_C f dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt, \quad C : t \mapsto z(t)$$

bei gleichbleibender Orientierung unabhängig von der Parametrisierung

bei Umkehrung der Durchlaufrichtung Änderung des Vorzeichens

Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals

linear bezüglich des Integranden

$$\int_C rf + sg dz = r \int_C f dz + s \int_C g dz$$

additiv bezüglich des Integrationsweges

$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz, \quad C = C_1 + C_2$$

insbesondere: $\int_C f dz = - \int_{-C} f dz$ mit $-C$ dem in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weg C

Stammfunktion

$$\int_C f' dz = f(z_1) - f(z_0)$$

für einen von z_0 nach z_1 verlaufenden Weg C

\rightsquigarrow Wegunabhängigkeit und Verschwinden des Kurvenintegrals für geschlossene Wege

Singularitäten einer komplexen Funktion

- schwache Singularität:

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$$

(aufgrund der Cauchyschen Integralformel immer hebbar)

- Pol n -ter Ordnung:

$$|(z - a)^n f(z)| = O(1), \quad z \rightarrow a,$$

$n > 0$ minimal

- wesentliche Singularität:

$$(z - a)^n f(z) \neq O(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Homotopie von Kurven

Abbildung

$$[0, 1]^2 \ni (s, t) \mapsto z(s, t) \in D,$$

die die Kurven $t \mapsto z(k, t)$, $k = 0, 1$, in einem Gebiet D stetig ineinander überführt

$z(1, t) = p$: Homotopie zu einem Punkt p

Cauchys Theorem

$$\int_C f dz = 0$$

f : bis auf endlich viele schwache Singularitäten im Gebiet D analytisch

C : geschlossen, in D zu einem Punkt homotop

Umlaufzahl

$$n(C, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - a}$$

für einen geschlossenen Weg C

Cauchysche Integralformel

$$n(C, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in D$$

f : analytisch in D

C : geschlossen, in D zu einem Punkt homotop

$n(C, z) = 1$ für einen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um z

Integralformel für Ableitungen einer komplexen Funktion

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

f : analytisch in D

C : geschlossen mit $n(C, z) = 1$, in D zu einem Punkt homotop

11.4 Eigenschaften analytischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

für eine auf einer Kreisscheibe mit Radius $> r$ um z analytische Funktion f

Identität gültig ebenfalls für Real- und Imaginärteil sowie für harmonische Funktionen

Maximumprinzip

f analytisch in D , stetig auf $\overline{D} \implies$

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

Abschätzungen für komplexe Ableitungen

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z|=r} |f(w)|$$

für eine auf einer Kreisscheibe mit Radius $> r$ um z analytische Funktion f

Satz von Liouville

f analytisch und beschränkt auf $\mathbb{C} \implies f$ konstant

Fundamentalsatz der Algebra

Existenz einer Nullstelle in \mathbb{C} für jedes nicht konstante Polynom p

\rightsquigarrow Faktorisierung

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n), \quad n = \text{Grad } p$$

11.5 Residuenkalkül

Residuum

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

für eine in einer punktierten Kreisscheibe $D \setminus \{a\}$ analytische Funktion f und jeden geschlossenen Weg $C \subset D \setminus \{a\}$ mit $n(C, a) = 1$

(z. B. einem entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis)

$\operatorname{Res}_a f = c_{-1}$ für

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z), \quad |g(z)| = O(1) \text{ für } z \rightarrow a$$

(Polstelle) oder für

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

(Laurent-Entwicklung in der Umgebung einer wesentlichen Singularität)

Berechnung von Residuen

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$$

für eine einfache Polstelle bei a

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z-a)^n f(z)) \right]$$

für eine Polstelle n -ter Ordnung bei a

Residuensatz

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{a_j} f$$

C : entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D

f : in \overline{D} stetig und in D bis auf endlich viele Singularitäten a_j analytisch

Trigonometrische Integranden

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t) dt, \quad r : \text{rationale Funktion}$$

Substitution

$$z = e^{it}, \quad \cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dz = iz dt$$

↔

$$\int_C f(z) dz, \quad f(z) = r \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{1}{iz}, \quad C : |z| = 1$$

Residuensatz \implies

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{|a|<1} \operatorname{Res}_a f$$

Rationale Integranden

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a f$$

f : rationale Funktion ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad um mindestens 2 kleiner als der Nennergrad

alternativ: $= -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a < 0} \operatorname{Res}_a f$

Transzendente Integranden

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} a > 0 \\ z=a}} \operatorname{Res} (f(z) e^{i\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

für eine rationale Funktion f ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad kleiner als der Nennergrad

Summation der Residuen in der unteren Halbebene für $\lambda < 0$

11.6 Potenzreihen

Komplexes Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (z-a)^j$$

Integraldarstellung des Restglieds

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+1}$$

mit C einem geschlossenen Weg mit $n(C, a) = 1$

(z. B. ein entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a)

\rightsquigarrow Approximation mit Ordnung $n+1$: $|f(z) - p_n(z)| = O(|z-a|^{n+1})$, $z \rightarrow a$

Komplexe Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

absolute Konvergenz für

$$|z-a| < r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^{(n)}(a)/n!|^{1/n} \right)^{-1}$$

Konvergenzradius r : Abstand des Entwicklungspunktes a zur nächsten Singularität von f , d.h. zum Rand des Analytizitätsgebietes

Methoden der Taylor-Entwicklung

- direkte Berechnung der Ableitungen im Entwicklungspunkt
- gliedweise Differentiation oder Integration
- Koeffizientenvergleich
- Produktbildung durch gliedweise Multiplikation
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument

Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

für eine in einem Kreisring $D : r_1 < |z-a| < r_2$ analytische Funktion

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

mit $C \subset D$ einem beliebigen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um a

Methoden der Laurent-Entwicklung

- direkte Berechnung der Koeffizienten
- gliedweise Differentiation oder Integration bekannter Reihen
- Koeffizientenvergleich
- Summe oder Produkte bekannter Reihen
- Substitution $z \rightarrow \frac{1}{z-a}$ in bekannten Taylor-Reihen
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument

11.7 Differentialgleichungen

Regulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von $a \implies$

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

regulär bei $z = a$

regulär bei $z = a \implies$ eindeutige, in einer Umgebung von a analytische Lösung zu beliebigen Anfangswerten $u(a) = u_0, u'(a) = u_1$

Konstruktion durch Koeffizientenvergleich

Singulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

q/r Pol höchstens erster und p/r Pol höchstens zweiter Ordnung bei $z = a \implies$

$z = a$ regulärer singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

charakteristische Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$$

mit

$$\frac{q(z)}{r(z)} = \frac{q_0 + q_1(z-a) + \dots}{z-a}, \quad \frac{p(z)}{r(z)} = \frac{p_0 + p_1(z-a) + \dots}{(z-a)^2}$$

Differenz der Nullstellen α, β von φ nicht ganzzahlig \implies

\exists zwei linear unabhängige Lösungen

$$(z-a)^\alpha v(z), \quad (z-a)^\beta w(z)$$

mit v und w in einer Umgebung von a analytisch und $v(a), w(a) \neq 0$

$\alpha - \beta \in \mathbb{Z} \implies$ i.a. nur eine Lösung obigen Typs zu dem Exponenten α mit dem größten Realteil

zweite Lösung durch Variation der Konstanten, d.h. mit dem Ansatz

$$u(z) = c(z)(z-a)^\alpha v(z)$$

Bessel-Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0$$

für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ zwei linear unabhängige Lösungen

$$J_{\pm\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

für $\alpha \in \mathbb{Z}$ nur eine Lösung obigen Typs für den positiven Index
spezielle Bessel-Funktionen

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

und

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}, \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}$$

Hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0$$

reguläre Singularitäten bei $z = 0, 1, \infty$

analytische Lösung für $-c \notin \mathbb{N}_0$

$$u(z) = F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n$$

mit $(t)_0 = 1$ und $(t)_n = t(t+1) \cdots (t+n-1)$ für $n \geq 1$