10.4 Fourier-Transformation

Fourier-Transformation

$$\hat{f}(y) = (\mathcal{F}f)(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,dx$$

inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\,dy$$

Differentiation bei Fourier-Transformation

$$f'(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}y\hat{f}(y), \qquad xf(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}\hat{f}\,'(y)$$

Verschiebung bei Fourier-Transformation

$$f(x-a) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \exp(-\mathrm{i}ay)\hat{f}(y), \qquad \exp(\mathrm{i}ax)f(x) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y-a)$$

Skalierung bei Fourier-Transformation

$$f(ax) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y/a)/|a|, \quad a \neq 0$$

Faltung und Fourier-Transformation

$$\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}, \qquad (f \star g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

Regeln für die Fourier-Transformation

$\varphi(x)$	$\hat{\varphi}(y)$
$af(x)+bg(x)$	$a\hat{f}(y)+b\hat{g}(y)$
$\hat{f}(-x)$	$2\pi f(y)$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\hat{f}(-y)}$
$f(ax)$	$\hat{f}(y/a)/\lvert a\rvert, \quad a\neq 0$
$f(x-a)$	$\exp(-\mathrm{i}ay)\hat{f}(y)$
$\exp(\mathrm{i}ax)f(x)$	$\hat{f}(y-a)$
$f'(x)$	$\mathrm{i}y\hat{f}(y)$
$xf(x)$	$\mathrm{i}\hat{f}\,'(y)$
$(f\star g)(x)$	$\hat{f}(y)\hat{g}(y)$

Quadratintegrierbare Funktionen

$L^2(D)$: Funktionen $f:\ D\to\mathbb{C}$ mit

$$\int_D |f(x)|^2\,dx<\infty$$

Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle_2=\int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

mit der induzierten Norm $\|\cdot\|_2$

$f\in L^2(D)$ durch glatte Funktionen approximierbar

Satz von Plancherel

$$2\pi\langle f,g\rangle=\langle\hat{f},\hat{g}\rangle,\quad \sqrt{2\pi}\|f\|=\|\hat{f}\|$$

$\rightsquigarrow$ Definition der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ durch Approximation mit glatten Funktionen)

Rekonstruktionssatz

$$\hat{f}(y)=0,\ |y|>h \quad\Longrightarrow\quad f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\pi/h)\,\mathrm{sinc}(hx-j\pi)$$

mit $\mathrm{sinc}(t)=\sin t/t$

Poisson-Summationsformel

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi\ell)$$

für stetige und quadratintegrierbare Funktionen f und $\hat{f}$