10.3 Diskrete Fourier-Transformation

Fourier-Matrix

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

unitär nach Normierung: $W_n^{-1} = W_n^*/n$

Diskrete Fourier-Transformation

$$f = W_n c \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \frac{1}{n} W_n^* f$$

d.h.

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk} \quad \Leftrightarrow \quad c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j w_n^{-kj}$$

mit $w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$

Transformation $c \mapsto f$ entspricht Auswertung des trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

an den Punkten $x_j = 2\pi j/n$, d.h. $f_j = p(x_j)$

inverse Transformation $f \mapsto c$ entspricht Riemann-Summe für die Fourier-Koeffizienten, d.h.

$$\langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_j}$$

mit $x_j = 2\pi j/n$

Schnelle Fourier-Transformation

Berechnung der diskreten Fourier-Transformation,

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)\,,$$

für $n = 2^\ell$

> $f = \mathrm{FFT}(c)$
>
> > $n = \mathrm{length}(c)$
> >
> > **if** $n = 1$, $f = c$, **return**
> >
> > **else**

$$
\begin{aligned}
&g = \mathrm{FFT}(c_0, c_2, \ldots, c_{n-2})\,, \quad h = \mathrm{FFT}(c_1, c_3, \ldots, c_{n-1})\\
&p = \left(1, w_n, w_n^2, \ldots, w_n^{n/2-1}\right)\\
&f = (g + p \,.\!* \, h,\; g - p \,.\!*\, h)
\end{aligned}
$$

end

Operationenzahl: $2n\ell$

Trigonometrische Interpolation

Berechnung des trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = c_m \cos(mx) + \sum_{|k|<m} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad 2m = n = 2^\ell\,,$$

das die Daten

$$f_j = f(x_j), \quad x_j = 2\pi j/n,\; j = 0, \ldots, n-1\,,$$

interpoliert, mit der inversen schnellen Fourier-Transformation:

$$(c_0, \ldots, c_m, c_{-m+1}, \ldots, c_{-1}) = \mathrm{IFFT}(f)$$

Zyklische Gleichungssysteme

zyklische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_n^{-kj}, \quad w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$$

Diagonalisierung durch die Fourier-Matrix

$$\frac{1}{n} W_n^* A W_n = \operatorname{diag}(\lambda), \quad \lambda = W_n^* a$$

$\rightsquigarrow$ Lösung zyklischer Gleichungssystems $Ax = b$ mit diskreter Fourier-Transformation

$$x = W_n \operatorname{diag}(\lambda)^{-1} (W_n^* b/n)$$