10.2 Konvergenz

Fourier-Projektion

$$p_n f = \sum_{|k|\le n} c_k\, e_k, \quad c_k = \langle f, e_k\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, dt$$

beste Approximation zu f in der durch das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2\pi}$ induzierten Norm $\|\cdot\|_{2\pi}$, d.h.

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} = \min_{q_n = \sum\limits_{|k|\le n} d_k e_k} \|f - q_n\|_{2\pi}$$

und $\|p_n f\|_{2\pi} \le \|f\|_{2\pi}$

Dirichlet-Kern

Integraldarstellung der Fourier-Projektion $p_n f = \sum_{|k|\le n}\langle f, e_k\rangle_{2\pi} e_k$, $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

$$(p_n f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} q_n(x-t)\, f(t)\, dt, \quad q_n(\xi) = \frac{\sin\left((n+1/2)\xi\right)}{\sin\left(\xi/2\right)}$$

Konvergenz im Mittel bei Fourier-Reihen

Konvergenz der Fourier-Projektionen

$$p_n f = \sum_{|k|\le n} c_k\, e_k, \quad e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad c_k = \langle f, e_k\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, dt$$

in der Norm $\|\cdot\|_{2\pi}$, d.h.

$$\|f - p_n f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (p_n f)(x)|^2\, dx \to 0, \quad n\to\infty$$

Parseval-Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2, \quad c_k = \langle f, e_k\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, dt$$

Konvergenzrate der Fourier-Projektion

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \le (n+1)^{-k}\|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

Ungleichung für $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$ bestmöglich