10.1 Fourier-Reihen

Periodische, quadratintegrierbare Funktionen

$L^2_{2\pi}$: 2π-periodische Funktionen $f:\,\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty$$

Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

mit induzierter Norm $\|\cdot\|_{2\pi}$

$f\in L^2_{2\pi}$ durch glatte Funktionen approximierbar

Orthogonalität von Kosinus und Sinus

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\cos(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\sin(\ell x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin(jx)\sin(kx)\,dx = 0$$

für $j\neq k$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)\,dx = \pi$$

für $k>0$

$\Longrightarrow$

$$1\,,\quad \cos(kx)\,,\quad \sin(kx)\,,\quad k>0$$

Orthogonalsystem in $L^2_{2\pi}$

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right)$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad k\geq 0\,,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad k\geq 1 \end{aligned}$$

Fourier-Reihen von geraden und ungeraden Funktionen

f gerade $\rightsquigarrow$ Kosinus-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt,\ k \geq 0$$

f ungerade $\rightsquigarrow$ Sinus-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt,\ k \geq 1$$

Fourier-Basis

Orthonormalbasis $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von $L^2_{2\pi}$

$$\langle e_j, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j(x) \overline{e_k(x)}\, dx = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k\, e_k(x), \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{e_k(t)}\, dt$$

Zusammenhang komplexer und reeller Fourier-Reihen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \sim f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Umrechnungsformeln

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$$

bzw.

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k)$$

f reell $\Leftrightarrow c_{-k} = \overline{c_k}$

Differentiation und Integration von Fourier-Reihen

$$\frac{d}{dx} \sum_k d_k e_k(x) = \sum_{k \neq 0} c_k e_k(x), \quad c_k = (\mathrm{i}k) d_k$$

mit $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

$$\int \sum_{k \neq 0} c_k e_k(x)\, dx = d_0 + \sum_{k \neq 0} d_k e_k(x), \quad d_k = (\mathrm{i}k)^{-1} c_k, \quad d_0 \in \mathbb{R}$$

$c_0 \neq 0 \implies$ keine periodische Stammfunktion

Skalierung von Fourier-Reihen

f h-periodisch $\rightsquigarrow$ lineare Transformation auf $[-\pi, \pi]$

alternativ: direkte Berechnung der Fourier-Koeffizienten

komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx/h}, \quad c_k = \frac{1}{h} \int\limits_0^h f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kt/h} \, dt$$

reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx/h) + b_k \sin(2\pi kx/h)$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{h} \int\limits_0^h f(t) \cos(2\pi kt/h) \, dt, \quad k \geq 0\,, \\ b_k &= \frac{2}{h} \int\limits_0^h f(t) \sin(2\pi kt/h) \, dt, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$