Teil 10

Fourier-Analysis

10.1 Fourier-Reihen

Periodische, quadratintegrierbare Funktionen

$L^2_{2\pi}$: 2π-periodische Funktionen $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty$$

Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

mit induzierter Norm $\|\cdot\|_{2\pi}$

$f \in L^2_{2\pi}$ durch glatte Funktionen approximierbar

Orthogonalität von Kosinus und Sinus

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\cos(kx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\sin(\ell x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx)\sin(kx)\, dx = 0$$

für $j \neq k$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\, dx = \pi$$

für $k > 0$

$\Longrightarrow$

$$1\,, \quad \cos(kx)\,, \quad \sin(kx)\,, \quad k > 0$$

Orthogonalsystem in $L^2_{2\pi}$

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt, \quad k \geq 0\,, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Fourier-Reihen von geraden und ungeraden Funktionen

f gerade $\rightsquigarrow$ Kosinus-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt,\ k \geq 0$$

f ungerade $\rightsquigarrow$ Sinus-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt,\ k \geq 1$$

Fourier-Basis

Orthonormalbasis $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von $L^2_{2\pi}$

$$\langle e_j, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j(x) \overline{e_k(x)}\, dx = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k\, e_k(x), \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{e_k(t)}\, dt$$

Zusammenhang komplexer und reeller Fourier-Reihen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \sim f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Umrechnungsformeln

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$$

bzw.

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k)\,, \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k)$$

f reell $\Leftrightarrow c_{-k} = \overline{c_k}$

Differentiation und Integration von Fourier-Reihen

$$\frac{d}{dx} \sum_k d_k e_k(x) = \sum_{k \neq 0} c_k e_k(x), \quad c_k = (\mathrm{i}k) d_k$$

mit $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

$$\int \sum_{k \neq 0} c_k e_k(x)\, dx = d_0 + \sum_{k \neq 0} d_k e_k(x), \quad d_k = (\mathrm{i}k)^{-1} c_k, \quad d_0 \in \mathbb{R}$$

$c_0 \neq 0 \implies$ keine periodische Stammfunktion

Skalierung von Fourier-Reihen

f h-periodisch $\rightsquigarrow$ lineare Transformation auf $[-\pi, \pi]$

alternativ: direkte Berechnung der Fourier-Koeffizienten

komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx/h}, \quad c_k = \frac{1}{h} \int\limits_0^h f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} kt/h} \, dt$$

reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx/h) + b_k \sin(2\pi kx/h)$$

mit

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{h} \int\limits_0^h f(t) \cos(2\pi kt/h) \, dt, \quad k \geq 0\,, \\ b_k &= \frac{2}{h} \int\limits_0^h f(t) \sin(2\pi kt/h) \, dt, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

10.2 Konvergenz

Fourier-Projektion

$$p_n f = \sum_{|k| \le n} c_k \, e_k, \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, dt$$

beste Approximation zu f in der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2\pi}$ induzierten Norm $\| \cdot \|_{2\pi}$, d.h.

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} = \min_{q_n = \sum\limits_{|k| \le n} d_k e_k} \|f - q_n\|_{2\pi}$$

und $\|p_n f\|_{2\pi} \le \|f\|_{2\pi}$

Dirichlet-Kern

Integraldarstellung der Fourier-Projektion $p_n f = \sum_{|k| \le n} \langle f, e_k \rangle_{2\pi} e_k$, $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

$$(p_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_n(x - t) \, f(t) \, dt, \quad q_n(\xi) = \frac{\sin\left((n + 1/2)\xi\right)}{\sin\left(\xi/2\right)}$$

Konvergenz im Mittel bei Fourier-Reihen

Konvergenz der Fourier-Projektionen

$$p_n f = \sum_{|k| \le n} c_k \, e_k, \quad e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, dt$$

in der Norm $\| \cdot \|_{2\pi}$, d.h.

$$\|f - p_n f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (p_n f)(x)|^2 \, dx \to 0, \quad n \to \infty$$

Parseval-Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2, \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, dt$$

Konvergenzrate der Fourier-Projektion

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \le (n + 1)^{-k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

Ungleichung für $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$ bestmöglich

10.3 Diskrete Fourier-Transformation

Fourier-Matrix

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$$

unitär nach Normierung: $W_n^{-1} = W_n^*/n$

Diskrete Fourier-Transformation

$$f = W_n c \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \frac{1}{n} W_n^* f$$

d.h.

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk} \quad \Leftrightarrow \quad c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j w_n^{-kj}$$

mit $w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$

Transformation $c \mapsto f$ entspricht Auswertung des trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

an den Punkten $x_j = 2\pi j/n$, d.h. $f_j = p(x_j)$

inverse Transformation $f \mapsto c$ entspricht Riemann-Summe für die Fourier-Koeffizienten, d.h.

$$\langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_j}$$

mit $x_j = 2\pi j/n$

Schnelle Fourier-Transformation

Berechnung der diskreten Fourier-Transformation,

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk}, \quad w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)\,,$$

für $n = 2^\ell$

$f = \mathrm{FFT}(c)$

  $n = \mathrm{length}(c)$

  if $n = 1$, $f = c$, **return**

  else

$$g = \mathrm{FFT}(c_0, c_2, \ldots, c_{n-2}), \quad h = \mathrm{FFT}(c_1, c_3, \ldots, c_{n-1})$$
$$p = \left(1, w_n, w_n^2, \ldots, w_n^{n/2-1}\right)$$
$$f = (g + p \mathbin{.*} h,\ g - p \mathbin{.*} h)$$

end

Operationenzahl: $2n\ell$

Trigonometrische Interpolation

Berechnung des trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = c_m \cos(mx) + \sum_{|k|<m} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad 2m = n = 2^\ell,$$

das die Daten

$$f_j = f(x_j), \quad x_j = 2\pi j/n,\ j = 0, \ldots, n-1,$$

interpoliert, mit der inversen schnellen Fourier-Transformation:

$$(c_0, \ldots, c_m, c_{-m+1}, \ldots, c_{-1}) = \mathrm{IFFT}(f)$$

Zyklische Gleichungssysteme

zyklische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_n^{-kj}, \quad w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$$

Diagonalisierung durch die Fourier-Matrix

$$\frac{1}{n} W_n^* A W_n = \mathrm{diag}(\lambda), \quad \lambda = W_n^* a$$

$\rightsquigarrow$ Lösung zyklischer Gleichungssystems $Ax = b$ mit diskreter Fourier-Transformation

$$x = W_n \,\mathrm{diag}(\lambda)^{-1} (W_n^* b/n)$$

10.4 Fourier-Transformation

Fourier-Transformation

$$\hat{f}(y) = (\mathcal{F}f)(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,dx$$

inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\,dy$$

Differentiation bei Fourier-Transformation

$$f'(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}y\hat{f}(y), \qquad xf(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}\hat{f}\,'(y)$$

Verschiebung bei Fourier-Transformation

$$f(x-a) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \exp(-\mathrm{i}ay)\hat{f}(y), \qquad \exp(\mathrm{i}ax)f(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y-a)$$

Skalierung bei Fourier-Transformation

$$f(ax) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y/a)/|a|, \quad a \neq 0$$

Faltung und Fourier-Transformation

$$\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}, \qquad (f \star g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

Regeln für die Fourier-Transformation

$\varphi(x)$	$\hat{\varphi}(y)$
$af(x)+bg(x)$	$a\hat{f}(y)+b\hat{g}(y)$
$\hat{f}(-x)$	$2\pi f(y)$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\hat{f}(-y)}$
$f(ax)$	$\hat{f}(y/a)/\lvert a\rvert, \quad a\neq 0$
$f(x-a)$	$\exp(-\mathrm{i}ay)\hat{f}(y)$
$\exp(\mathrm{i}ax)f(x)$	$\hat{f}(y-a)$
$f'(x)$	$\mathrm{i}y\hat{f}(y)$
$xf(x)$	$\mathrm{i}\hat{f}\,'(y)$
$(f\star g)(x)$	$\hat{f}(y)\hat{g}(y)$

Quadratintegrierbare Funktionen

$L^2(D)$: Funktionen $f:\ D\to\mathbb{C}$ mit

$$\int\limits_D |f(x)|^2\,dx<\infty$$

Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle_2=\int\limits_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

mit der induzierten Norm $\|\cdot\|_2$

$f\in L^2(D)$ durch glatte Funktionen approximierbar

Satz von Plancherel

$$2\pi\langle f,g\rangle=\langle\hat{f},\hat{g}\rangle,\quad \sqrt{2\pi}\|f\|=\|\hat{f}\|$$

$\rightsquigarrow$ Definition der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ durch Approximation mit glatten Funktionen)

Rekonstruktionssatz

$$\hat{f}(y)=0,\ |y|>h \quad\Longrightarrow\quad f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\pi/h)\,\mathrm{sinc}(hx-j\pi)$$

mit $\mathrm{sinc}(t)=\sin t/t$

Poisson-Summationsformel

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi\ell)$$

für stetige und quadratintegrierbare Funktionen f und $\hat{f}$