Teil 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Aussage und Axiom

Aussage: sprachlicher Ausdruck mit eindeutigem Wahrheitswert w („wahr") bzw. f („falsch")

$$A: \quad \text{Beschreibung}$$

Axiom: grundlegende nicht aus anderen Aussagen ableitbare Aussage

Logische Operationen

Negation	$\neg A$	nicht A
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
Disjunktion	$A \vee B$	A oder B
Implikation	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent zu B

Umformungsregeln für logische Operationen

Assoziativgesetze

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze

$$A \wedge B = B \wedge A, \quad A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B), \quad \neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C), \quad (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

äquivalente Darstellung der Implikation: $\neg A \vee B$

Quantoren

Existenzquantor und Allquantor

$$\exists\text{: „es gibt \ldots"}, \quad \forall\text{: „für alle \ldots"}$$

Negation $\rightsquigarrow$ Vertauschung der Quantoren

$$\begin{aligned} \neg\big(\exists\, p \in P: \; A(p)\big) &= \forall\, p \in P: \; \neg A(p) \\ \neg\big(\forall\, p \in P: \; A(p)\big) &= \exists\, p \in P: \; \neg A(p) \end{aligned}$$

Direkter Beweis

Herleitung einer Behauptung B aus bekannten wahren Aussagen A

$$A \Longrightarrow B$$

gegebenenfalls Berücksichtigung von Voraussetzungen

Indirekter Beweis

Herleitung einer Aussage B aus Voraussetzungen V durch Folgern eines Widerspruchs aus der Annahme, dass die Aussage B bei Gültigkeit der Voraussetzungen V falsch ist:

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

mit einer falschen Aussage F, insbesondere $F = \neg V$ oder $F = B$

Vollständige Induktion

Beweis von parameterabhängigen Aussagen $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$

- Induktionsanfang: zeige $A(1)$
- Induktionsschluss: zeige $A(n) \implies A(n+1)$

1.2 Mengen

Menge

Menge mit Elementen a_k bzw. a

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}, \quad A = \{a : \ a \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}$$

$a \in A$	a ist Element von A
$a \notin A$	a ist nicht Element von A
$A \subseteq B$ $(\subset)$	A ist (echte) Teilmenge von B
$\|A\|$	Anzahl der Elemente in A
$\emptyset$	leere Menge

natürliche, ganze, rationale, relle und komplexe Zahlen

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

Mengenoperationen

Vereinigung	$A \cup B$
Durchschnitt	$A \cap B$
Differenz, Komplementärmenge	$A \setminus B$

Regeln für Mengenoperationen

Assoziativgesetze

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Kommutativgesetze

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

De Morgansche Regeln

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B), \quad C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

Distributivgesetze

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Kartesisches Produkt

geordnete Paare von Elementen zweier Mengen

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \wedge b \in B\}$$

n-Tupel: $(a_1, \ldots, a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$

Relation

Beziehung zwischen Elementen zweier Mengen

$$a \,\mathrm{R}\, b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$$

Eigenschaften von Relationen

reflexiv	$(a, a) \in R$
symmetrisch	$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
antisymmetrisch	$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
transitiv	$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
total	$(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Äquivalenzrelation ($a \sim b$): reflexiv, symmetrisch und transitiv
Partition der Grundmenge in disjunkte Äquivalenzklassen

Halbordnung ($a \leq b$): reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Ordnung: zusätzlich total

1.3 Abbildungen

Abbildung

eindeutige Zuordnung

$$f : A \longrightarrow B, \quad a \mapsto b = f(a)$$

Bild: $f(U)$, Urbild: $f^{-1}(V)$

Eigenschaften von Abbildungen

injektiv

$$\forall a \neq a' \in A : \; f(a) \neq f(a')$$

surjektiv

$$\forall b \in B \, \exists \, a \in A : \; f(a) = b$$

bijektiv: injektiv und surjektiv

Verknüpfung von Abbildungen

Hintereinanderschaltung von $f : A \to B$ und $g : B \to C$

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

assoziativ aber i.a. nicht kommutativ

Inverse Abbildung

Umkehrung f^{-1} einer bijektiven Abbildung $f : A \to B$

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

1.4 Kombinatorik

Fakultät

Anzahl der Permutationen von n Elementen

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

Stirlingsche Formel

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \bigl(1 + O(1/n)\bigr)$$

Binomialkoeffizient

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}$$

Pascalsches Dreieck

Rekursion für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$\rightsquigarrow$ Dreiecksschema

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & 1 & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & 1 & & 1 & & & \\
\binom{2}{k} & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
\binom{3}{k} & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
\binom{4}{k} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Binomischer Satz

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k
\end{aligned}$$

Identitäten für Binomialkoeffizienten

$$
\begin{aligned}
2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
0 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1 \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{k-1}, \quad k > 0
\end{aligned}
$$

Auswahl von Teilmengen

Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen k Elemente auszuwählen

	nicht sortiert	sortiert
ohne Wiederholungen	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
mit Wiederholungen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

1.5 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen

imaginäre Einheit: $\mathrm{i}^2 = -1$

$$\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

Real- und Imaginärteil

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

Komplexe Konjugation

konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y$$

verträglich mit den arithmetischen Operationen

$$\overline{z_1 \circ z_2} = \bar{z}_1 \circ \bar{z}_2, \quad \circ = +, -, *, /$$

Betrag komplexer Zahlen

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Positivität

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

Multiplikativität

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,\ z_2 \neq 0$$

Dreiecksungleichung

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

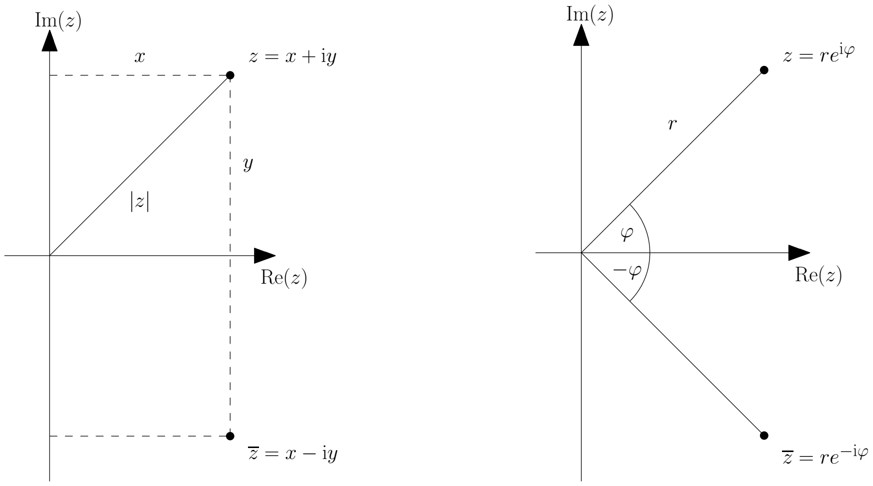
Formel von Euler-Moivre

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Sinus und Kosinus: Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1

$$\cos t = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$
$$\sin t = \operatorname{Im} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$

Gaußsche Zahlenebene



Darstellung in Polarkoordinaten

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$$

mit

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg(z) = \arctan y/x + \sigma\pi$$

$\sigma = 0$ für $x \geq 0$, $\sigma = \pm\pi$ für $x < 0 \rightsquigarrow$ Standardbereich $\varphi \in (-\pi, \pi]$

z	1	-1	$\pm\mathrm{i}$	$1 \pm \mathrm{i}$	$\sqrt{3} \pm \mathrm{i}$	$1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}$
r	1	1	1	$\sqrt{2}$	2	2
φ	0	π	$\pm\pi/2$	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/3$

Multiplikation komplexer Zahlen

$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k\exp(\mathrm{i}\varphi_k)$

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathrm{i} = r_1r_2\exp(\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Division komplexer Zahlen

$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k = r_k\exp(\mathrm{i}\varphi_k)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,\mathrm{i} = \frac{r_1}{r_2}\exp(\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2))$$

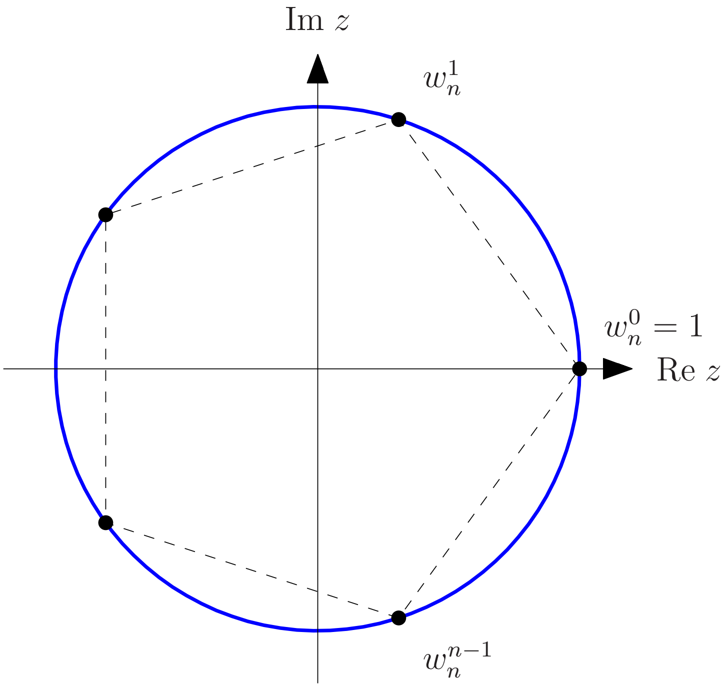
Kehrwert

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r^2}\bar{z} = \frac{1}{r}\exp(-\mathrm{i}\varphi) = \frac{x}{r^2} - \frac{y}{r^2}\,\mathrm{i}$$

Komplexe Einheitswurzeln

$z^n = 1$

$$z_k = w_n^k, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n), \quad k = 0, \ldots, n-1$$



Potenzen einer komplexen Zahl

ganzzahlige Exponenten $m \in \mathbb{Z}$

$$z^m = r^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

rationale Exponenten $p/q \in \mathbb{Q}$

$$z^{p/q} = r^{p/q} \exp\left(\mathrm{i}p\varphi/q\right) w_q^{kp}, \quad k = 0, \ldots, q-1$$

mit $w_q^k = \exp\left(2\pi\mathrm{i}/q\right)^k$ den q-ten Einheitswurzeln

Kreis in der Gaußschen Zahlenebene

$$|z-a| = s|z-b|, \quad s \neq 1$$

Mittelpunkt

$$w = \frac{1}{1-s^2}a - \frac{s^2}{1-s^2}b$$

Radius

$$r = \frac{s}{|1-s^2|}|b-a|$$

Parameterform des Kreises

$$w + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, 2\pi)$$