

Höhere Mathematik - Kompakt

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematische Grundlagen	5
1.1	Aussagenlogik	7
1.2	Mengen	9
1.3	Abbildungen	11
1.4	Kombinatorik	12
1.5	Komplexe Zahlen	14
2	Vektorrechnung	17
2.1	Koordinaten	19
2.2	Vektoren	22
2.3	Skalarprodukt	24
2.4	Vektorprodukt- und Spatprodukt	27
2.5	Geraden	29
2.6	Ebenen	32
2.7	Quadratische Kurven	35
3	Differentialrechnung	37
3.1	Polynome und rationale Funktionen	39
3.2	Exponentialfunktion und Logarithmus	42
3.3	Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen	44
3.4	Folgen	47
3.5	Reihen	49
3.6	Stetigkeit	51
3.7	Differentiationsregeln	52
3.8	Anwendungen	54
3.9	Taylor-Entwicklung	55
3.10	Extremwerte und Funktionsuntersuchung	57
4	Integralrechnung	59
4.1	Bestimmtes und unbestimmtes Integral	61
4.2	Integrationsregeln	62
4.3	Rationale Integranden	63
4.4	Trigonometrische Integranden	64
4.5	Uneigentliche Integrale	65
5	Lineare Algebra	67
5.1	Gruppen und Körper	69
5.2	Vektorräume	71
5.3	Skalarprodukt und Norm	73
5.4	Lineare Abbildungen	75
5.5	Matrizrechnung	77
5.6	Determinanten	79
5.7	Lineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme	81

5.8	Eigenwerte, Normalformen und Singulärwertzerlegung	84
5.9	Normalformen	86
5.10	Ausgleichsprobleme	88
5.11	Orthogonale Transformationen und Quadriken	89
6	Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher	95
6.1	Topologie von Mengen	97
6.2	Funktionen	98
6.3	Konvergenz	99
6.4	Partielle Ableitungen	100
6.5	Ableitungsregeln	101
6.6	Lineare Approximation und Taylor-Entwicklung	102
6.7	Anwendungen	103
6.8	Extremwerte	104
7	Mehrdimensionale Integration	105
7.1	Mehrdimensionale Integrale	107
7.2	Variablentransformation	109
7.3	Kurven- und Flächenintegrale	110
7.4	Anwendungen	112
7.5	Integralsätze	113
8	Vektoranalysis	115
8.1	Skalar- und Vektorfelder	117
8.2	Differentialoperatoren	120
8.3	Integration	123
8.4	Integralsätze	125
8.5	Potentialtheorie	127
9	Differentialgleichungen	129
9.1	Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung	131
9.2	Differentialgleichungen zweiter Ordnung	134
9.3	Nichtlineare Differentialgleichungssysteme in Standardform	137
9.4	Lineare Differentialgleichungssysteme und Stabilität	139
9.5	Laplace-Transformation	145
10	Fourier-Analysis	149
10.1	Fourier-Reihen	151
10.2	Konvergenz	154
10.3	Diskrete Fourier-Transformation	155
10.4	Fourier-Transformation	157
11	Komplexe Analysis	161
11.1	Komplexe Funktionen	163
11.2	Komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen	165
11.3	Komplexe Integration	167
11.4	Eigenschaften analytischer Funktionen	170
11.5	Residuenkalkül	171
11.6	Potenzreihen	173
11.7	Differentialgleichungen	175

Teil 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Aussage und Axiom

Aussage: sprachlicher Ausdruck mit eindeutigem Wahrheitswert w („wahr“) bzw. f („falsch“)

A : Beschreibung

Axiom: grundlegende nicht aus anderen Aussagen ableitbare Aussage

Logische Operationen

Negation	$\neg A$	nicht A
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
Disjunktion	$A \vee B$	A oder B
Implikation	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent zu B

Umformungsregeln für logische Operationen

Assoziativgesetze

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze

$$A \wedge B = B \wedge A, \quad A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B), \quad \neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C), \quad (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

äquivalente Darstellung der Implikation: $\neg A \vee B$

Quantoren

Existenzquantor und Allquantor

\exists : „es gibt ...“, \forall : „für alle ...“

Negation \rightsquigarrow Vertauschung der Quantoren

$$\begin{aligned}\neg(\exists p \in P : A(p)) &= \forall p \in P : \neg A(p) \\ \neg(\forall p \in P : A(p)) &= \exists p \in P : \neg A(p)\end{aligned}$$

Direkter Beweis

Herleitung einer Behauptung B aus bekannten wahren Aussagen A

$$A \Longrightarrow B$$

gegebenenfalls Berücksichtigung von Voraussetzungen

Indirekter Beweis

Herleitung einer Aussage B aus Voraussetzungen V durch Folgern eines Widerspruchs aus der Annahme, dass die Aussage B bei Gültigkeit der Voraussetzungen V falsch ist:

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

mit einer falschen Aussage F , insbesondere $F = \neg V$ oder $F = B$

Vollständige Induktion

Beweis von parameterabhängigen Aussagen $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$

- Induktionsanfang: zeige $A(1)$
- Induktionsschluss: zeige $A(n) \implies A(n+1)$

1.2 Mengen

Menge

Menge mit Elementen a_k bzw. a

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}, \quad A = \{a : a \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}$$

$a \in A$	a ist Element von A
$a \notin A$	a ist nicht Element von A
$A \subseteq B$ (\subset)	A ist (echte) Teilmenge von B
$ A $	Anzahl der Elemente in A
\emptyset	leere Menge

natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

Mengenoperationen

Vereinigung	$A \cup B$
Durchschnitt	$A \cap B$
Differenz, Komplementärmenge	$A \setminus B$

Regeln für Mengenoperationen

Assoziativgesetze

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Kommutativgesetze

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$$

De Morgansche Regeln

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B), \quad C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Distributivgesetze

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Kartesisches Produkt

geordnete Paare von Elementen zweier Mengen

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

n -Tupel: $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$

Relation

Beziehung zwischen Elementen zweier Mengen

$$a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$$

Eigenschaften von Relationen

reflexiv	$(a, a) \in R$
symmetrisch	$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
antisymmetrisch	$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
transitiv	$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
total	$(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Äquivalenzrelation ($a \sim b$): reflexiv, symmetrisch und transitiv

Partition der Grundmenge in disjunkte Äquivalenzklassen

Halbordnung ($a \leq b$): reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Ordnung: zusätzlich total

1.3 Abbildungen

Abbildung

eindeutige Zuordnung

$$f : A \longrightarrow B, \quad a \mapsto b = f(a)$$

Bild: $f(U)$, Urbild: $f^{-1}(V)$

Eigenschaften von Abbildungen

injektiv

$$\forall a \neq a' \in A : f(a) \neq f(a')$$

surjektiv

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$$

bijektiv: injektiv und surjektiv

Verknüpfung von Abbildungen

Hintereinanderschaltung von $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

assoziativ aber i.a. nicht kommutativ

Inverse Abbildung

Umkehrung f^{-1} einer bijektiven Abbildung $f : A \rightarrow B$

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

1.4 Kombinatorik

Fakultät

Anzahl der Permutationen von n Elementen

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Stirlingsche Formel

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(1/n))$$

Binomialkoeffizient

Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot \dots \cdot (k-2)(k-1)k}$$

Pascalsches Dreieck

Rekursion für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

↪ Dreiecksschema

$$\begin{array}{cccccc} \binom{0}{k} & & & & & 1 \\ \binom{1}{k} & & & & & & 1 \\ \binom{2}{k} & & & & & & & 1 \\ \binom{3}{k} & & & & & & & & 1 \\ \binom{4}{k} & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & \vdots \end{array}$$

↘ + ↙ ↘ + ↙ ↘ + ↙

Binomischer Satz

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \end{aligned}$$

Identitäten für Binomialkoeffizienten

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{k-1}, \quad k > 0$$

Auswahl von Teilmengen

Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n verschiedenen Elementen k Elemente auszuwählen

	nicht sortiert	sortiert
ohne Wiederholungen	$n(n-1) \cdots (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
mit Wiederholungen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

1.5 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen

imaginäre Einheit: $i^2 = -1$

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

Real- und Imaginärteil

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

Komplexe Konjugation

konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - iy$$

verträglich mit den arithmetischen Operationen

$$\overline{\bar{z}_1 \circ z_2} = \bar{z}_1 \circ \bar{z}_2, \quad \circ = +, -, *, /$$

Betrag komplexer Zahlen

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Positivität

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0$$

Multiplikativität

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|, \quad z_2 \neq 0$$

Dreiecksungleichung

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

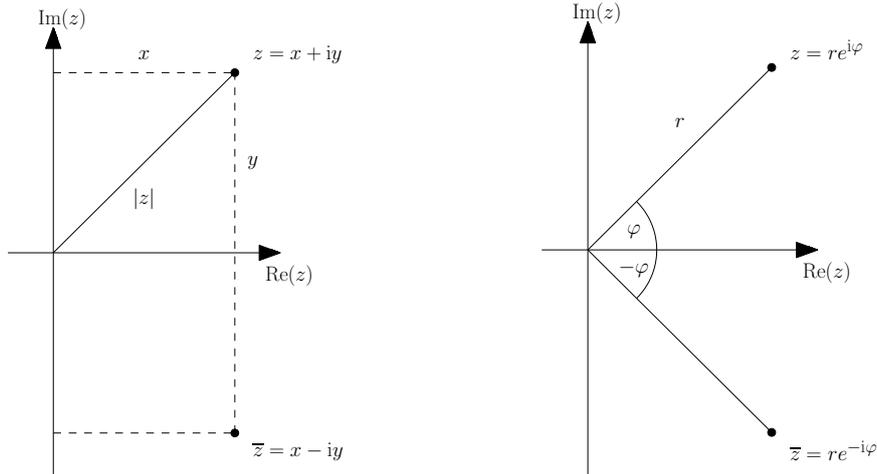
Formel von Euler-Moivre

$$\cos t + i \sin t = \exp(it), \quad t \in \mathbb{R}$$

Sinus und Kosinus: Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1

$$\begin{aligned} \cos t &= \operatorname{Re} e^{it} = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) \\ \sin t &= \operatorname{Im} e^{it} = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) \end{aligned}$$

Gaußsche Zahlenebene



Darstellung in Polarkoordinaten

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \exp(i\varphi)$$

mit

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg(z) = \arctan y/x + \sigma\pi$$

$\sigma = 0$ für $x \geq 0$, $\sigma = \pm\pi$ für $x < 0 \rightsquigarrow$ Standardbereich $\varphi \in (-\pi, \pi]$

z	1	-1	$\pm i$	$1 \pm i$	$\sqrt{3} \pm i$	$1 \pm \sqrt{3}i$
r	1	1	1	$\sqrt{2}$	2	2
φ	0	π	$\pm\pi/2$	$\pm\pi/4$	$\pm\pi/6$	$\pm\pi/3$

Multiplikation komplexer Zahlen

$$z_k = x_k + iy_k = r_k \exp(i\varphi_k)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i = r_1 r_2 \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Division komplexer Zahlen

$$z_k = x_k + iy_k = r_k \exp(i\varphi_k)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i = \frac{r_1}{r_2} \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2))$$

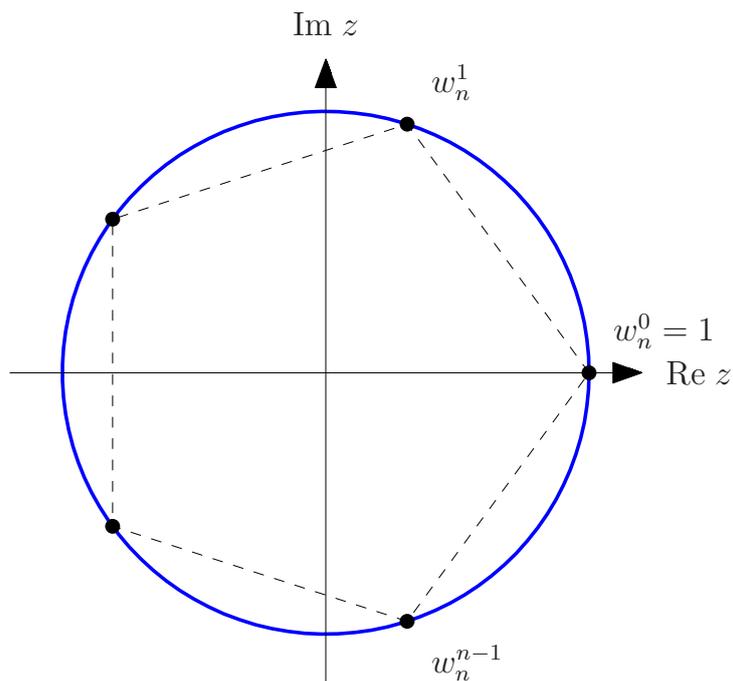
Kehrwert

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r^2} \bar{z} = \frac{1}{r} \exp(-i\varphi) = \frac{x}{r^2} - \frac{y}{r^2} i$$

Komplexe Einheitswurzeln

$$z^n = 1$$

$$z_k = w_n^k, \quad w_n = \exp(2\pi i/n), \quad k = 0, \dots, n-1$$



Potenzen einer komplexen Zahl

ganzzahlige Exponenten $m \in \mathbb{Z}$

$$z^m = r^m e^{im\varphi}, \quad z = r e^{i\varphi}$$

rationale Exponenten $p/q \in \mathbb{Q}$

$$z^{p/q} = r^{p/q} \exp(ip\varphi/q) w_q^{kp}, \quad k = 0, \dots, q-1$$

mit $w_q^k = \exp(2\pi i/q)^k$ den q -ten Einheitswurzeln

Kreis in der Gaußschen Zahlenebene

$$|z - a| = s|z - b|, \quad s \neq 1$$

Mittelpunkt

$$w = \frac{1}{1-s^2}a - \frac{s^2}{1-s^2}b$$

Radius

$$r = \frac{s}{|1-s^2|}|b-a|$$

Parameterform des Kreises

$$w + r e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

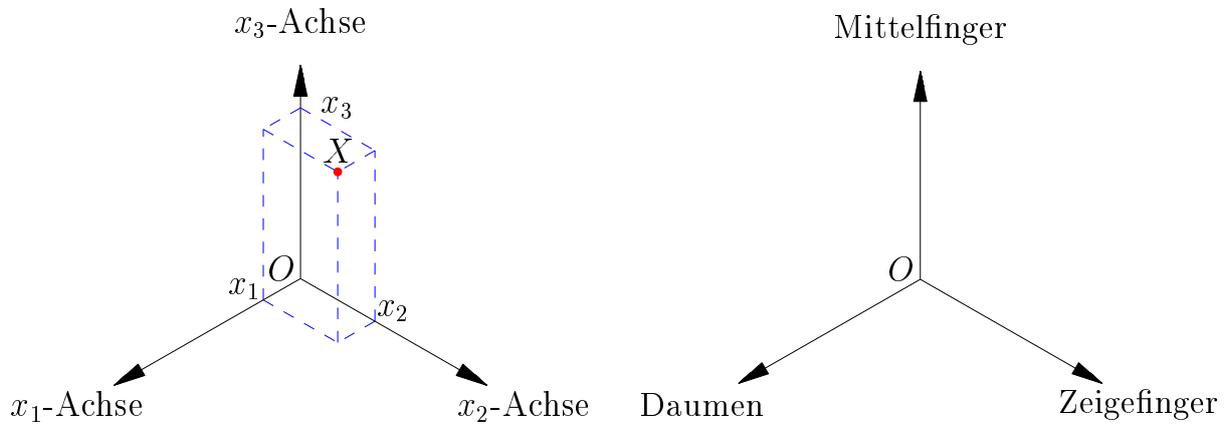
Teil 2

Vektorrechnung

2.1 Koordinaten

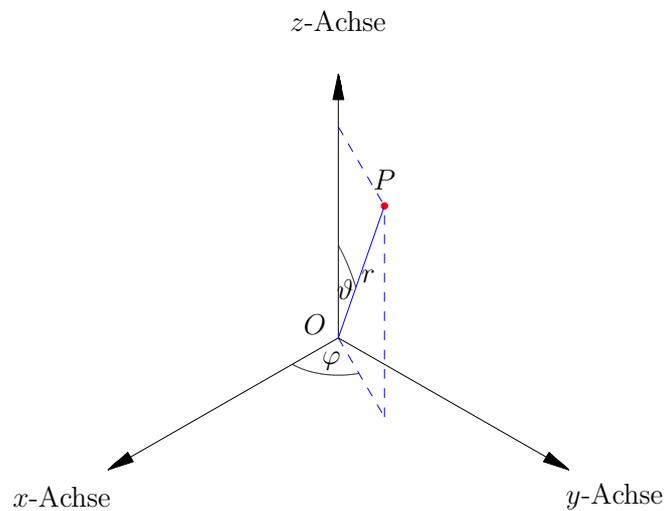
Kartesisches Koordinatensystem in der Ebene und im Raum

senkrecht schneidende Zahlengeraden (Achsen), orientiert gemäß der „Rechten-Hand-Regel“



Punkte, dargestellt durch Koordinaten: $X = (x_1, x_2, x_3)$ bzw. $P = (x, y, z)$

Kugelkoordinaten



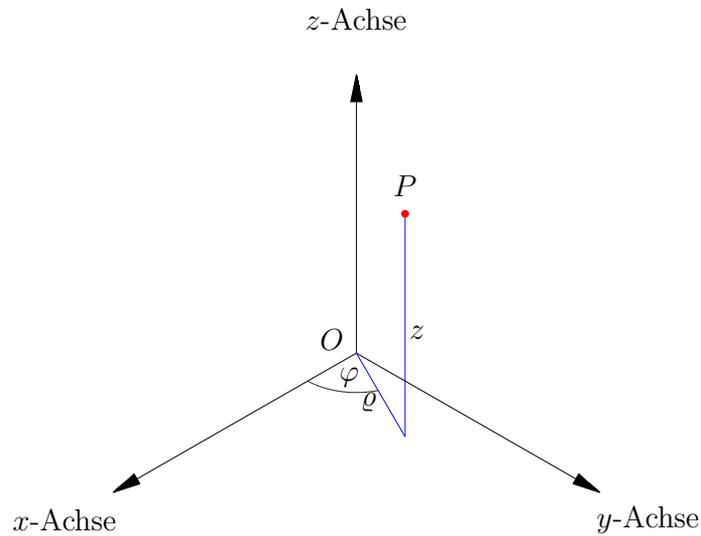
$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

bzw.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x) + \sigma\pi, \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

mit $\sigma = 0$ für $x \geq 0$ und $\sigma = \pm 1$ für $x < 0 \rightsquigarrow$ Standardbereich $\varphi \in (-\pi, \pi]$

Zylinderkoordinaten



$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

bzw.

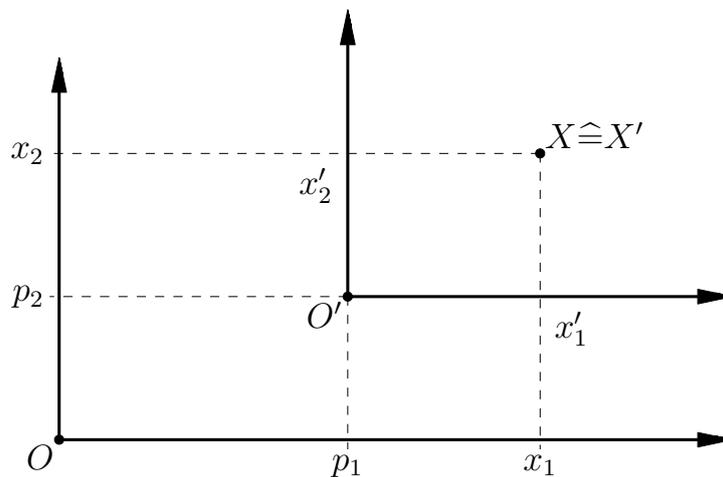
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x) + \sigma\pi, \quad z = z$$

mit $\sigma = 0$ für $x \geq 0$ und $\sigma = \pm 1$ für $x < 0 \rightsquigarrow$ Standardbereich $\varphi \in (-\pi, \pi]$

Translation eines kartesischen Koordinatensystems

Verschiebung des Ursprungs, $O \rightarrow O' = (p_1, p_2, p_3)$

$$X = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3)$$

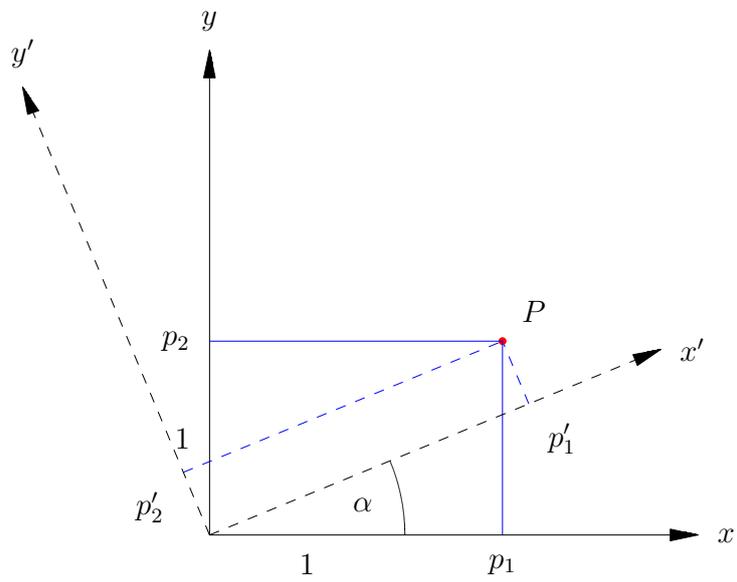


Rotation eines kartesischen Koordinatensystems

Drehung der xy -Ebene um die z -Achse mit dem Winkel α :

$P = (p_1, p_2, p_3) \rightarrow P' = (p'_1, p'_2, p'_3)$ mit

$$p'_1 = \cos \alpha p_1 + \sin \alpha p_2, \quad p'_2 = -\sin \alpha p_1 + \cos \alpha p_2, \quad p'_3 = p_3$$

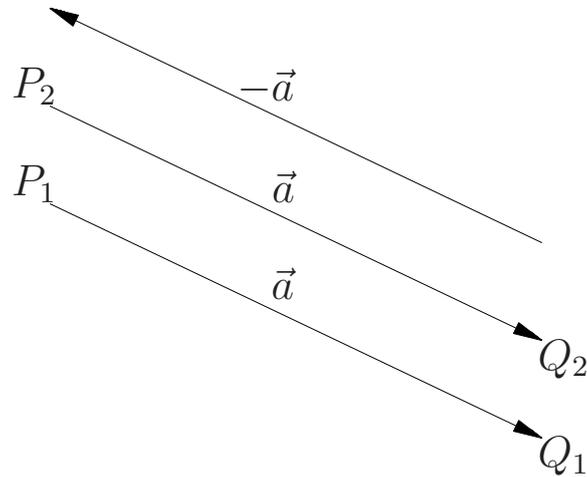


2.2 Vektoren

Vektoren

Pfeil vom Punkt P zum Punkt Q

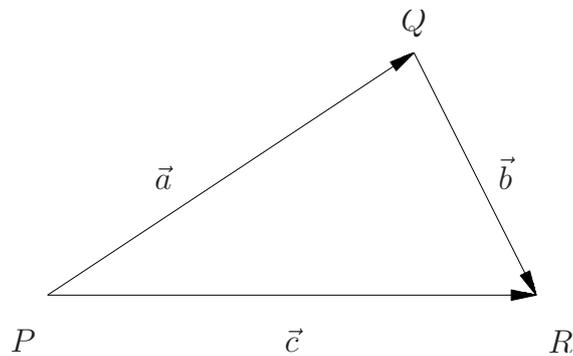
$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$



Ortsvektor: $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)^t$, Nullvektor: $\vec{0}$

Addition von Vektoren

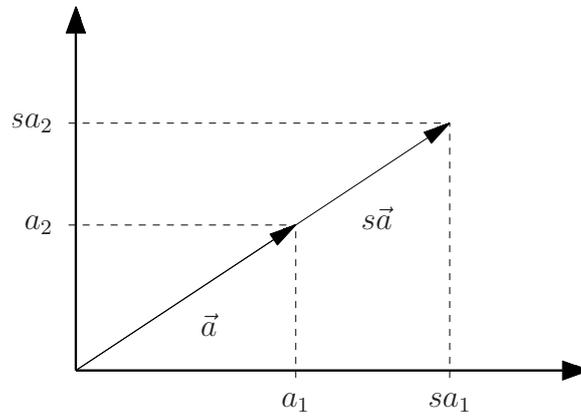
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$



$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix}$$



Betrag eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

kompatibel mit Skalarmultiplikation: $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$

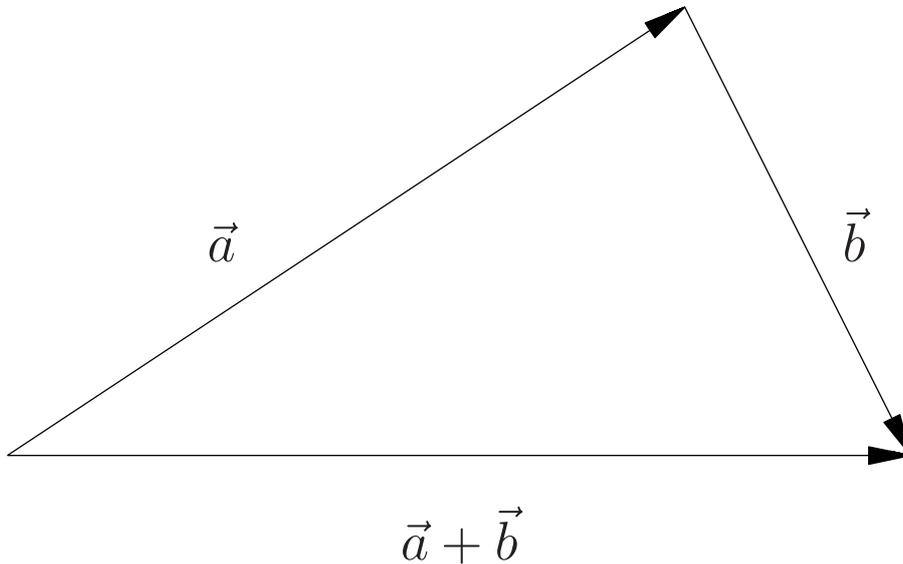
Einheitsvektor: Vektor mit Betrag 1

$$\vec{v}^0 = \vec{v}/|\vec{v}|$$

Dreiecksungleichung

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Gleichheit genau dann, wenn $\vec{a} \parallel \vec{b}$



Rechenregeln für Vektoren

Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Assoziativgesetz

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

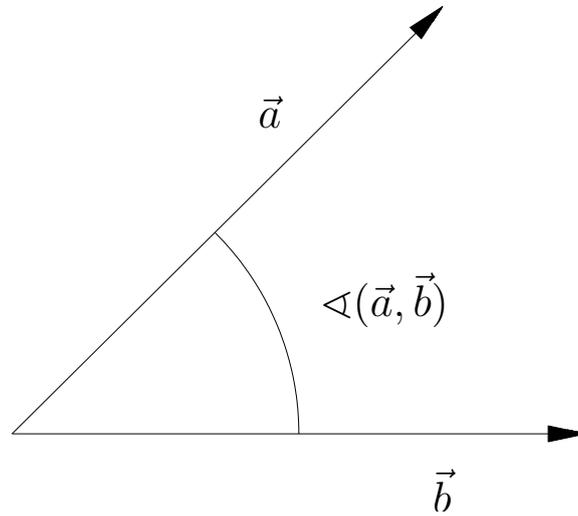
Distributivgesetz

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

2.3 Skalarprodukt

Winkel zwischen zwei Vektoren

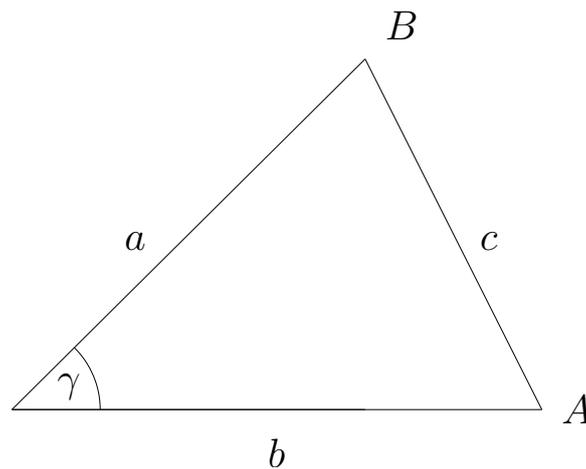
$$\gamma = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$$



orthogonal: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \gamma = \pi/2$

Kosinussatz

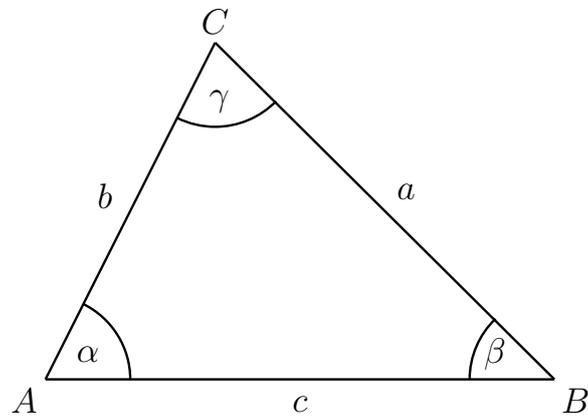
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



$\gamma = \pi/2 \rightsquigarrow$ Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Sinussatz

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$



Skalarprodukt von Vektoren im Raum

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

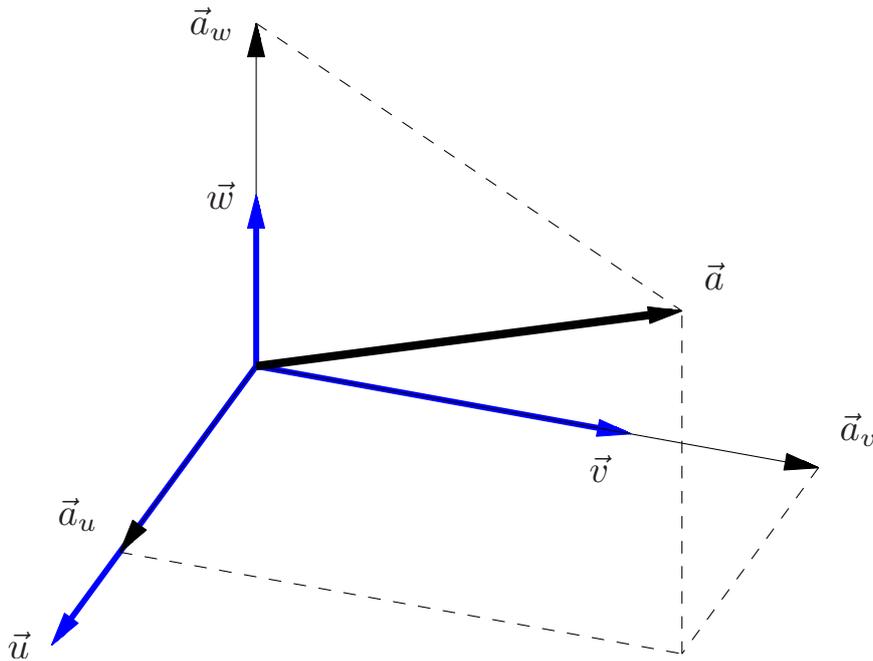
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

übliche Rechenregeln für Produkte

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad (s\vec{a} + r\vec{b}) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c}$$

Orthogonale Basis

paarweise orthogonale Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, jeweils ungleich $\vec{0}$



Zerlegung eines Vektors in Projektionen auf die Achsen

$$\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \vec{w}$$

Vereinfachung (Nenner 1) für Einheitsvektoren (Orthonormalbasis)

Satz des Pythagoras (allgemeinere Form) \rightsquigarrow

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2$$

Satz des Pythagoras

$$\vec{u} \perp \vec{v} \implies |\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$$

2.4 Vektorprodukt- und Spatprodukt

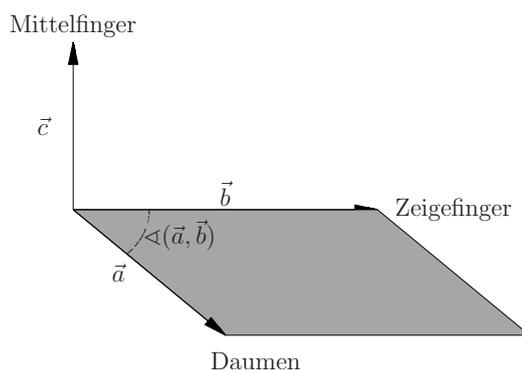
Vektorprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

orthogonal zu \vec{a} und \vec{b} , gemäß der „Rechten-Hand-Regel“ orientiert

Länge: Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$



Regeln für Vektorprodukte

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \implies \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \implies |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Linearität

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \times (\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2) = \\ \alpha_1 \beta_1 (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + \alpha_1 \beta_2 (\vec{a}_1 \times \vec{b}_2) + \alpha_2 \beta_1 (\vec{a}_2 \times \vec{b}_1) + \alpha_2 \beta_2 (\vec{a}_2 \times \vec{b}_2) \end{aligned}$$

Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Epsilon-Tensor

$$\varepsilon_{i,j,k} \in \{-1, 0, 1\}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

Null bei zwei gleichen Indizes,

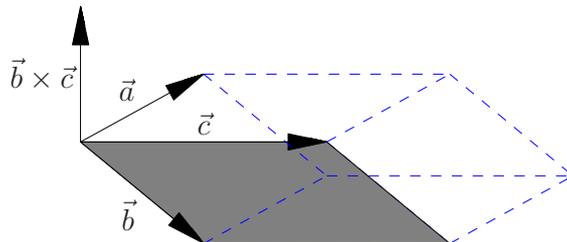
positiv bei zyklischer Permutation der kanonischen Indexfolge $(i, j, k) = (1, 2, 3)$,

Vorzeichenänderung bei Vertauschung von Indizes.

Spatprodukt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

orientiertes Volumen des von den drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} aufgespannten Spats
positiv bei Orientierung der Vektoren gemäß der Rechten-Hand-Regel



Eigenschaften des Spatprodukts

zyklische Vertauschung

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

lineare Abhängigkeit

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

mit mindestens einem der Skalare α, β, γ ungleich 0

Orientierung

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$$

für jedes Rechtssystem

Volumen eines Tetraeders

aufspannende Vektoren \vec{a} , \vec{b} und $\vec{c} \rightsquigarrow$

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Berechnung von Koordinaten mit Hilfe des Spatproduktes

$d = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0 \implies$

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

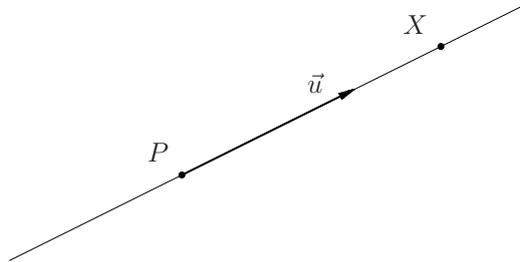
mit

$$\alpha = [\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]/d, \quad \beta = [\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}]/d, \quad \gamma = [\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}]/d$$

2.5 Geraden

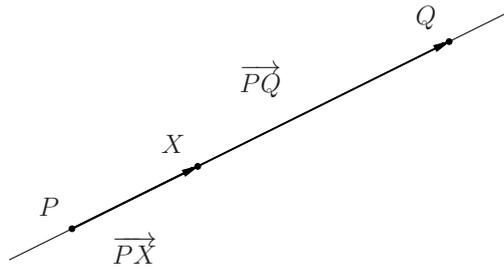
Punkt-Richtungs-Form

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = p_i + tu_i$$



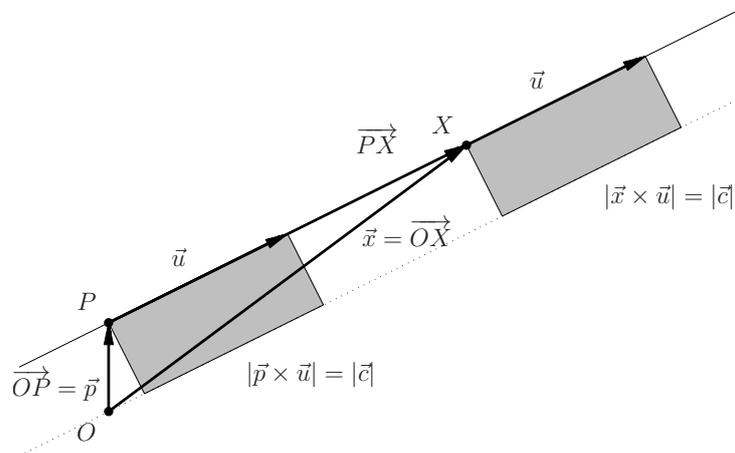
Zwei-Punkte-Form

$$\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ} \quad \Leftrightarrow \quad x_i = p_i + t(q_i - p_i)$$



Momentenform

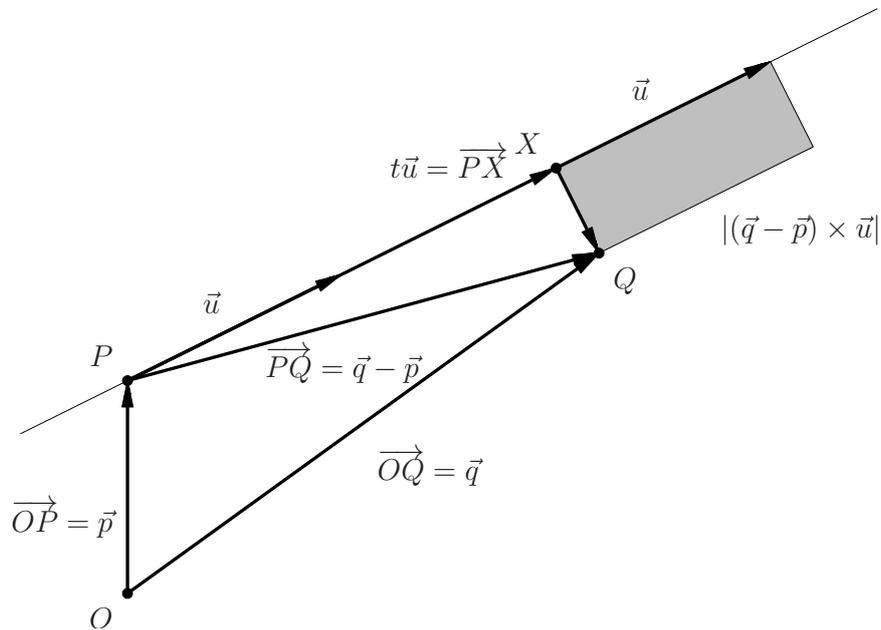
$$\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \times \vec{u} = \vec{p} \times \vec{u}$$



Abstand Punkt-Gerade

Projektion X eines Punktes Q auf eine Gerade durch P mit Richtung \vec{u}

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}$$



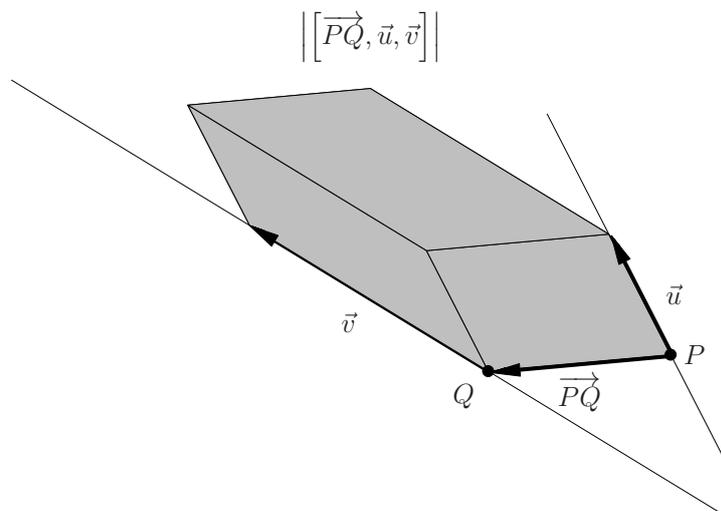
Abstand

$$d = |\overrightarrow{XQ}| = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand zweier Geraden

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Geraden gegeben durch Punkte P, Q und Richtungen $\vec{u} \parallel \vec{v}$
windschief: $d > 0$



Abstand paralleler Geraden

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Berechnung der Punkte X, Y kürzesten Abstandes aus den Orthogonalitätsbedingungen

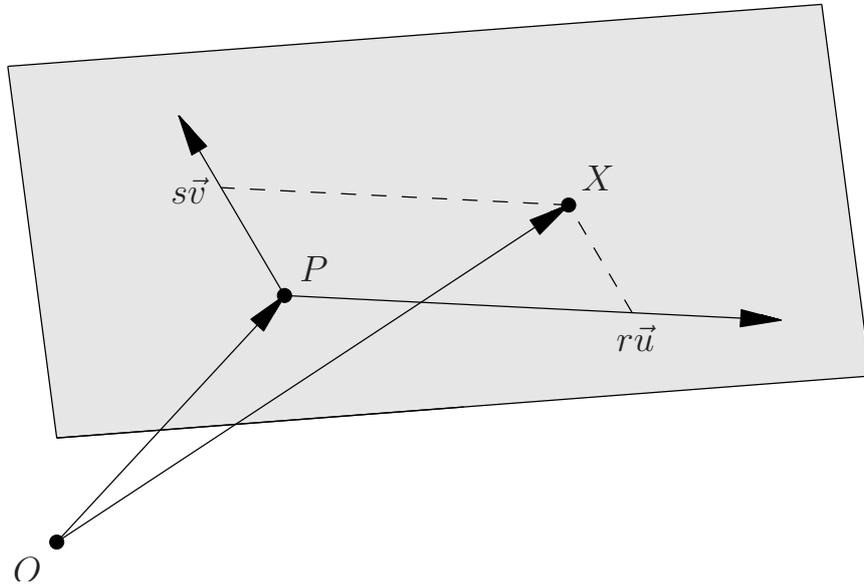
$$\vec{x} - \vec{y} \perp \vec{u}, \vec{v}, \quad \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

\rightsquigarrow lineares Gleichungssystem für s und t

2.6 Ebenen

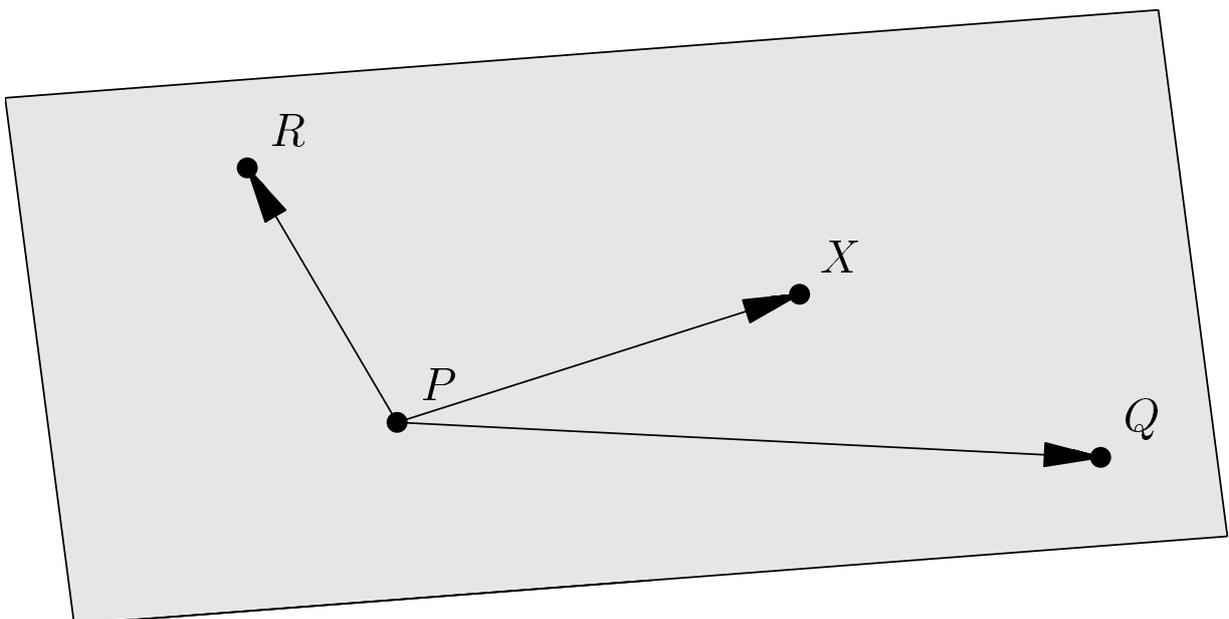
Parametrische Darstellung einer Ebene

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v} \Leftrightarrow x_i = p_i + su_i + tv_i$$



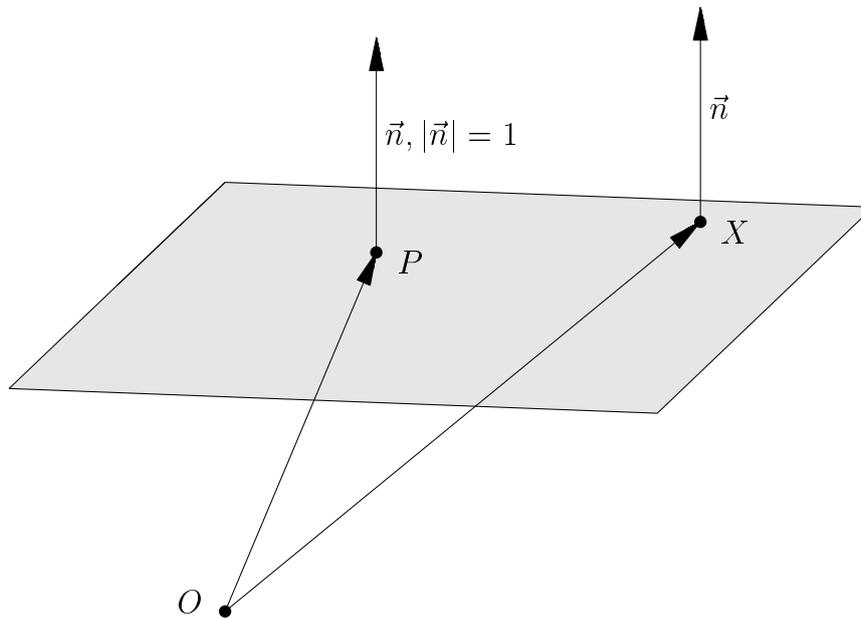
Drei-Punkte-Form einer Ebene

$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = 0 = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



Hesse-Normalform einer Ebene

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = d, \quad d = \vec{p} \cdot \vec{n}$$

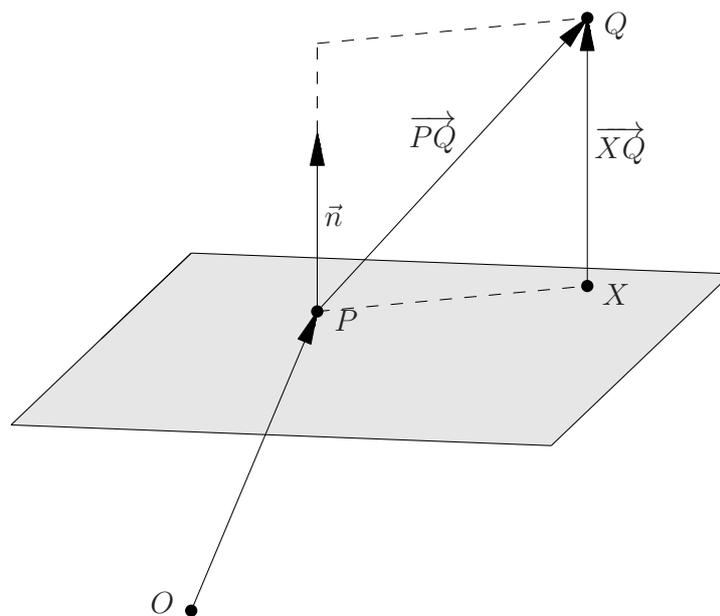


Normalform: $|\vec{n}| = 1$ und $d \geq 0$ ist der Abstand der Ebene zum Ursprung

Abstand Punkt-Ebene

Abstand von Q

$$d = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

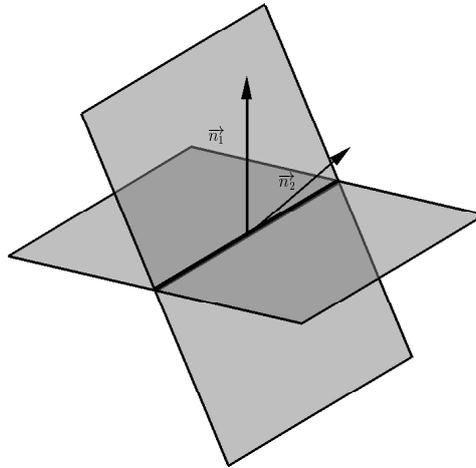


Projektion von Q

$$\vec{x} = \vec{q} - \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}$$

Schnitt zweier Ebenen

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \in [0, \pi/2]$$



Richtung der Schnittgeraden g : $\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

gemeinsame Lösungen beider Ebenengleichungen \rightsquigarrow Punkte P auf g

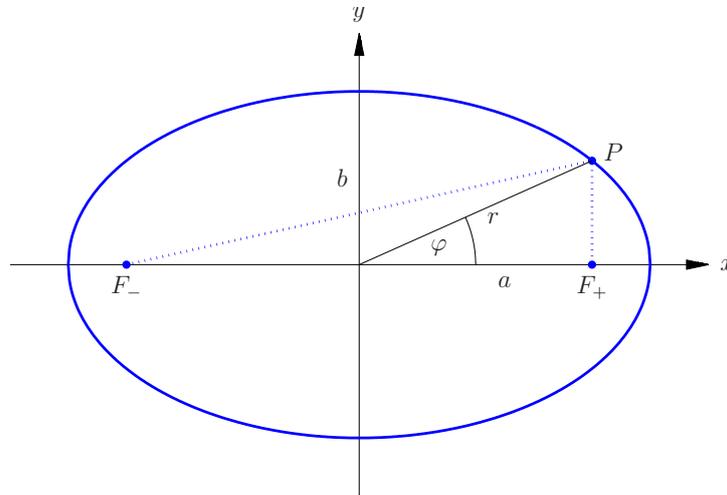
2.7 Quadratische Kurven

Ellipse

Punkte $P = (x, y)$ mit konstanter Abstandssumme zu zwei Brennpunkten F_{\pm}

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

mit $2a > |\overrightarrow{F_-F_+}|$



$F_{\pm} = (\pm f, 0) \rightsquigarrow$ Koordinatendarstellung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

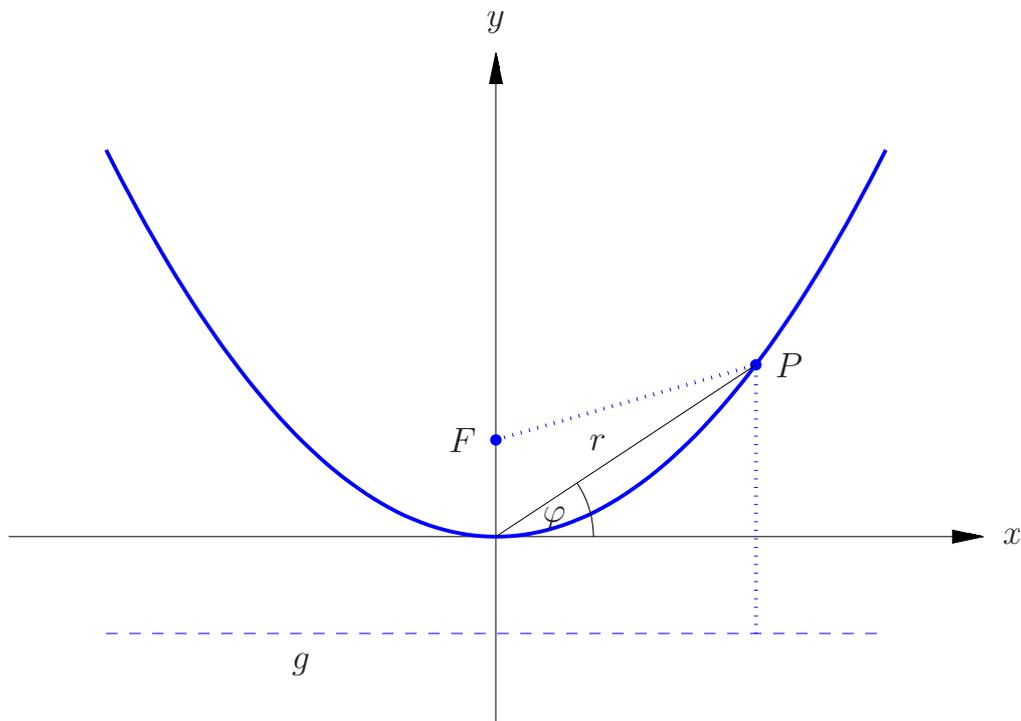
für die Polarkoordinaten der Punkte P

Parametrisierung

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Parabel

Punkte $P = (x, y)$ gleichen Abstands von einem Brennpunkt F und einer Leitgerade g



$F = (0, f)$ und $g : y = -f \rightsquigarrow$ Koordinatendarstellung

$$4fy = x^2$$

bzw.

$$r = \frac{4f \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

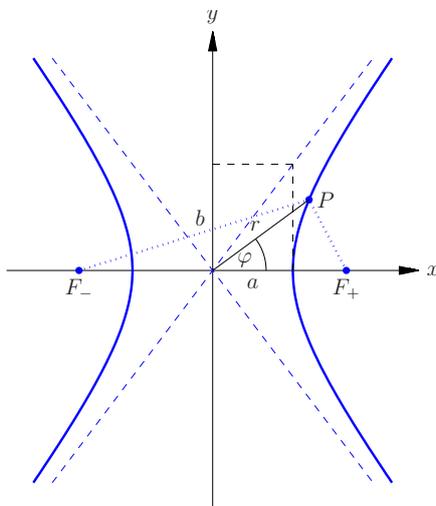
für die Polarkoordinaten der Punkte P

Hyperbel

Punkte $P = (x, y)$ mit konstanter Abstandsdifferenz zu zwei Brennpunkten F_{\pm}

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

mit $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$



$F_{\pm} = (\pm f, 0) \rightsquigarrow$ Koordinatendarstellung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

bzw.

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P

Parametrisierung

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Teil 3

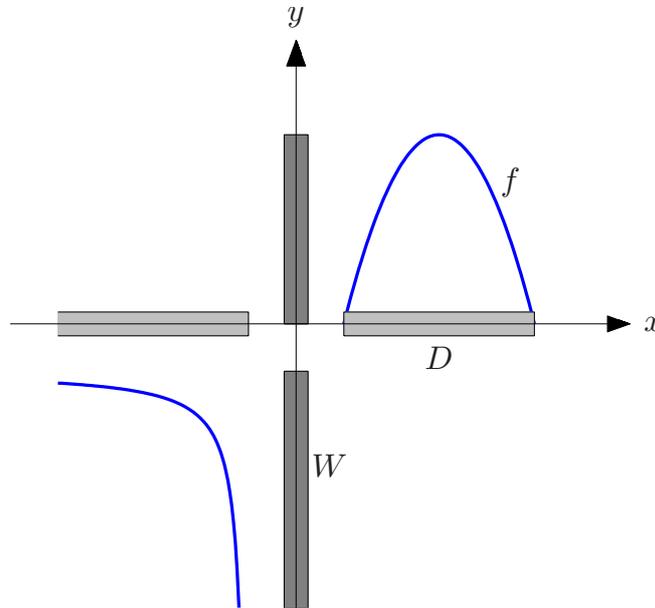
Differentialrechnung

3.1 Polynome und rationale Funktionen

Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

ordnet jedem Argument x aus dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ einen Wert $f(x)$ aus dem Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ zu



Graph: Paare (x, y) mit $y = f(x)$

Umkehrfunktion

injektive Funktion $f : D \ni x \rightarrow y = f(x) \in W \rightsquigarrow$

$$f^{-1} : W \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}, \quad y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Graph: Spiegelbild des Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden

Rechnen mit Funktionen

punktweise definierte Operationen

- Linearkombination: $(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x)$
- Produkt und Quotient: $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$
- Hintereinanderschaltung: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Gerade und ungerade Funktionen

gerade: symmetrisch zur y -Achse, $f(x) = f(-x)$

ungerade: punktsymmetrisch zum Ursprung, $f(x) = -f(-x)$

Monotone Funktion

wachsend

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

$\Leftrightarrow f' \geq 0$ bis auf isolierte Punkte

analog: monoton fallend ($\leq \leftrightarrow \geq$)

Konvexe Funktion

Sekante oberhalb des Graphen

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad t \in (0,1)$$

$\Leftrightarrow f'' \geq 0$ bis auf isolierte Punkte

Konvexität \implies Stetigkeit

Polynom

Polynom p vom Grad n

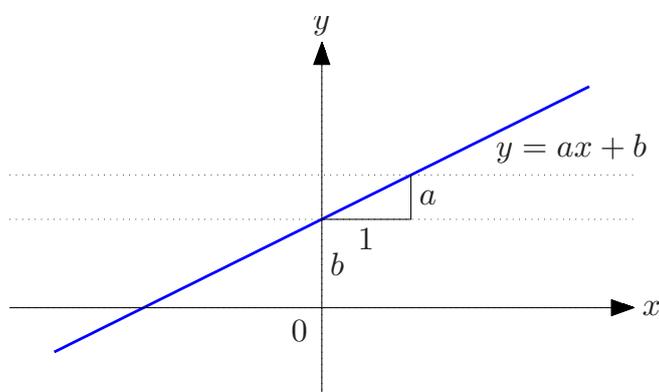
$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0$$

reelle oder komplexe Koeffizienten a_k

Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b$$

Graph: Gerade mit Steigung a und y -Achsenabschnitt b



- Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$
- Zwei-Punkte-Form: $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Leftrightarrow \quad y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Graph: Parabel mit Scheitel $(x_0, y_0) = (-b/(2a), -b^2/(4a) + c)$

Polynomdivision

Division mit Rest

$$p = fq + r, \quad \text{Grad } f = \text{Grad } p - \text{Grad } q \geq 0, \quad \text{Grad } r < \text{Grad } q$$

$$p(t) = 0, q(x) = (x - t) \implies r = 0, \text{ d.h. } p(x) = f(x)(x - t)$$

Faktorisierung von Polynomen

Linearfaktoren zu komplexen Nullstellen z_k

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

Paare komplex konjugierter Nullstellen $x_k \pm iy_k \rightsquigarrow$ reelle quadratische Faktoren

$$(z - x_k - iy_k)(z - x_k + iy_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

Interpolationspolynom in Lagrange-Form

$$p(x_k) = f_k \implies$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

linearer Interpolant ($n = 1$)

$$p(x) = f_0 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Rationale Funktion

Quotient zweier Polynome

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}$$

irreduzibel, wenn p und q keinen gemeinsamen Linearfaktor besitzen

Polstellen: Nullstellen des Nenners, Ordnung entspricht der Vielfachheit

Partialbruchzerlegung

Zerlegung entsprechend der Polstellen z_j (Ordnung m_j)

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = f(z) + \sum_j r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \dots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}}$$

Grad $f = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ ($f = 0$, falls Zählergrad < Nennergrad)

Berechnungsmethoden

- Multiplikation mit

$$q(z) = c \prod_j (z - z_j)^{m_j}$$

und Vergleich der Koeffizienten von z^k

- Multiplikation mit $(z - z_j)^{m_j}$ und Setzen von $z = z_j \rightsquigarrow$ Koeffizient a_{j,m_j} ;
rekursive Anwendung nach Subtraktion bereits bestimmter Terme

Reelle Partialbruchzerlegung

reelle Polstellen x_j (Vielfachheit m_j) und komplex-konjugierte Polstellen $u_k \pm iv_k$ (Vielfachheit n_k) \rightsquigarrow

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \sum_j \sum_{\nu=1}^{m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu=1}^{n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

Grad $f = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ ($f = 0$ falls Zählergrad < Nennergrad)

Berechnungsmethoden

- Multiplikation mit

$$q(z) = c \prod_j (z - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

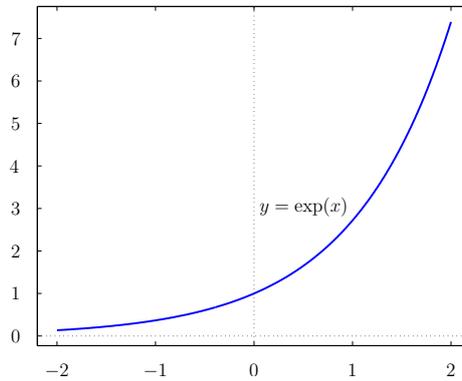
und Vergleich der Koeffizienten von z^ℓ

- Zusammenfassen komplex-konjugierter Terme der komplexen Partialbruchzerlegung

3.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentialfunktion

$$y = e^x = \exp(x), \quad e = 2.71828\dots$$



Funktionalgleichung

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

insbesondere: $e^{-x} = 1/e^x$

Verzinsung

Endkapital bei Startkapital x nach n -facher Aus- bzw. Einzahlung einer Rate r ($r < 0$ bzw. $r > 0$) und einem Zinsfaktor $(1 + p)$

$$y = (1 + p)^n x + \frac{(1 + p)^n - 1}{p} r$$

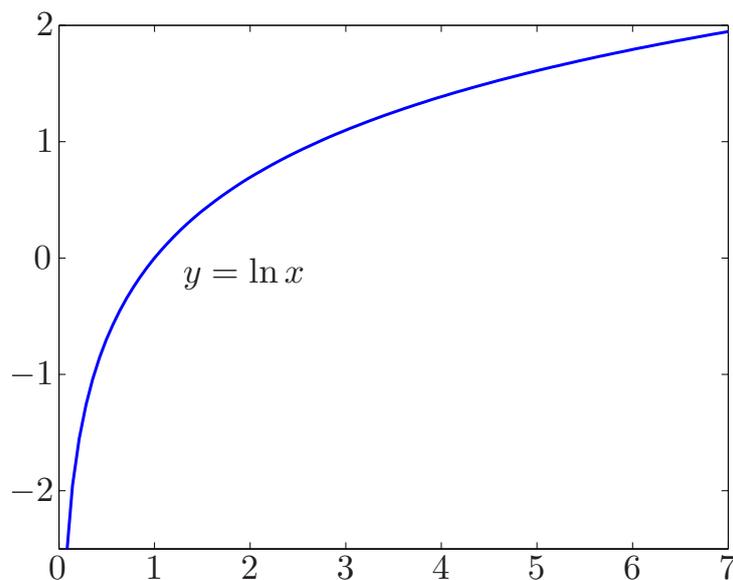
effektiver Jahreszins bei monatlicher Verzinsung mit Zinsfaktor $1 + p_m$

$$p_j = (1 + p_m)^{12} - 1 \geq 12p_m$$

Natürlicher Logarithmus

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$$



Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

insbesondere: $\ln(1/x) = -\ln x$

Allgemeine Potenzfunktion und Logarithmus

$$y = a^x = \exp(x \ln a), \quad a > 0$$

Umkehrfunktion

$$x = \log_a y, \quad y > 0$$

Zehner- und dualer Logarithmus: $\log = \log_{10}$, $\text{ld} = \log_2$

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

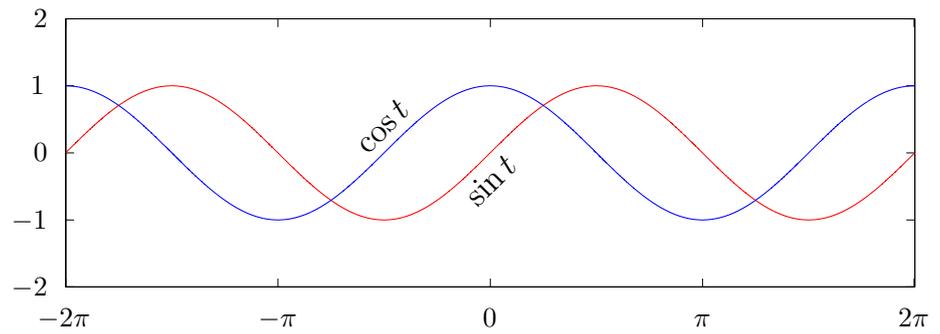
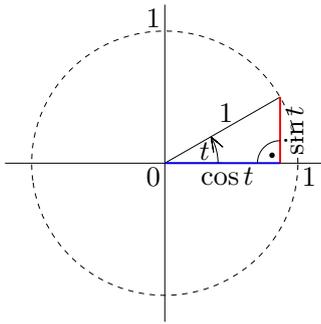
$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \end{aligned}$$

Umrechnung zwischen verschiedenen Basen

$$\log_b x = \log_b a \log_a x$$

3.3 Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

Sinus und Kosinus



Identitäten

- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
- $\cos t = \cos(-t)$, $\sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

spezielle Werte

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Formel von Euler-Moivre

$$\cos t + i \sin t = \exp(it), \quad t \in \mathbb{R}$$

Sinus und Kosinus: Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1

$$\cos t = \operatorname{Re} e^{it} = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \operatorname{Im} e^{it} = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

Additionstheoreme von Sinus und Kosinus

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta$

insbesondere: $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Tangens und Kotangens

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

spezielle Werte

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Arkusfunktionen

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

$$\arccos : [-1 \dots 1] \rightarrow [\pi \dots 0]$$

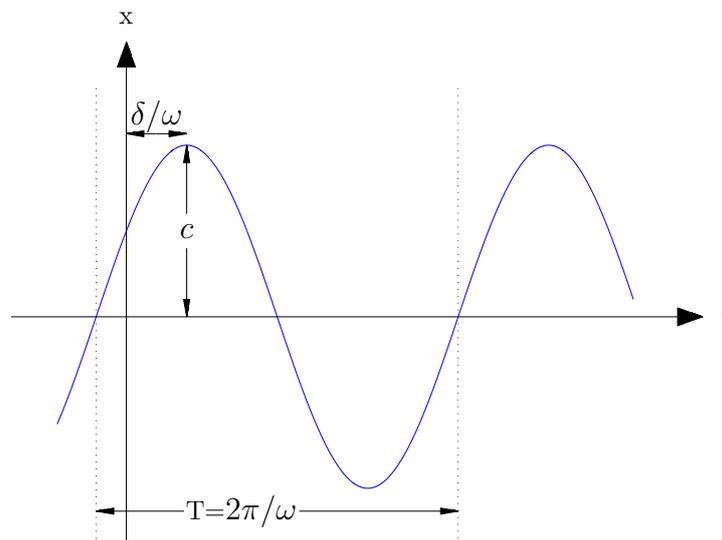
$$\arcsin : [-1 \dots 1] \rightarrow [-\pi/2 \dots \pi/2]$$

$$\arctan : [-\infty \dots \infty] \rightarrow [-\pi/2 \dots \pi/2]$$

Harmonische Schwingung

$$x(t) = c \cos(\omega t - \delta)$$

Amplitude $c \geq 0$, Phasenverschiebung δ , Frequenz ω bzw. Periode $T = 2\pi/\omega$



äquivalente Darstellungen

$$x(t) = \operatorname{Re} c \exp(i(\omega t - \delta)) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

mit $a = c \cos(\delta)$, $b = c \sin(\delta)$

Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

$$\sum_{k=1}^2 c_k \cos(\omega t - \delta_k) = c \cos(\omega t - \delta)$$

mit $c = \sqrt{c_1^2 + 2 \cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2}$

alternative Darstellung $x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$

$\rightsquigarrow c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$

Modulierte Schwingung

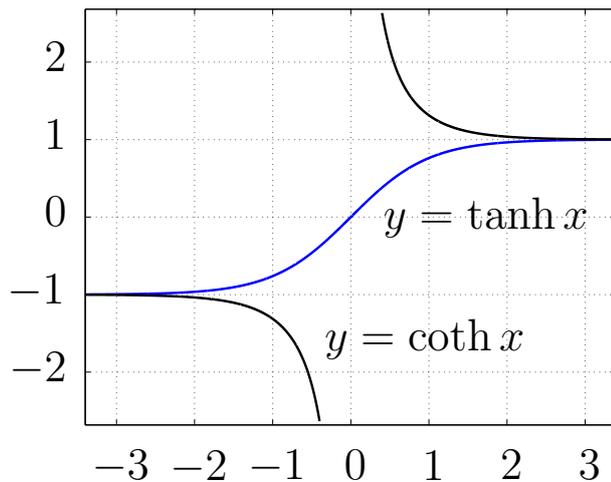
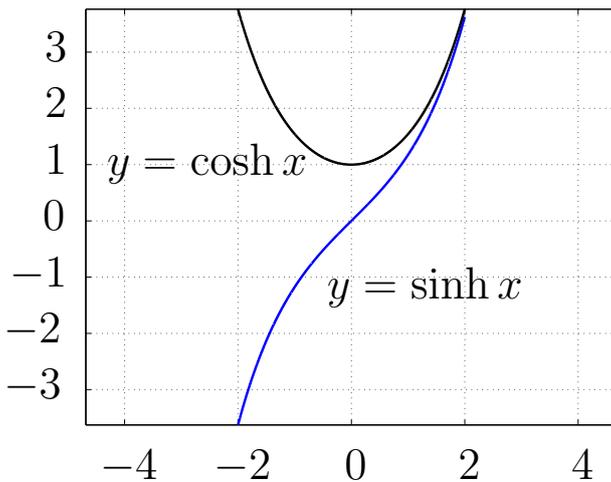
$$\sum_{k=1}^2 c_k e^{i\omega_k t} = c(t) e^{i\bar{\omega} t}, \quad c(t) = c_1 e^{i\Delta\omega t} + c_2 e^{-i\Delta\omega t}$$

mit $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ und $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$

periodisch bei rationalem Frequenzverhältnis ω_1/ω_2

Hyperbelfunktionen

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x$$



Hyperbolische Identitäten

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

3.4 Folgen

Grenzwert

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Rechenregeln für Grenzwerte

$$a_n \rightarrow a \text{ und } b_n \rightarrow b \implies$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$

Cauchy-Kriterium

$$\text{Konvergenz von } (a_n) \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall j, k > n_\varepsilon : |a_j - a_k| < \varepsilon$$

Monotone Konvergenz einer Folge

$$a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq c \implies \text{Konvergenz gegen Grenzwert } a \leq c$$

analog: Konvergenz monoton fallender, nach unten beschränkter Folgen

Uneigentliche Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow$$

$$\forall a > 0 \exists n_a \forall n > n_a : a_n > a$$

analog: $a_n \rightarrow -\infty$

Limes Inferior und Limes Superior

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n, \quad \underline{a}_n = \inf_{k \geq n} a_k \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a}_n, \quad \overline{a}_n = \sup_{k \geq n} a_k \end{aligned}$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \implies \text{Konvergenz von } (a_n) \text{ gegen } a$$

Vergleichskriterium für Folgen

$$\lim a_n = a, \lim c_n = c \text{ und } a_n \leq b_n \leq c_n \text{ für } n > n_0 \implies$$

$$a \leq \underline{\lim} b_n \leq \overline{\lim} b_n \leq c$$

$$a = c \implies \text{Konvergenz von } (b_n)$$

Häufungspunkt einer Folge

Grenzwert a einer konvergenten Teilfolge von (a_n)

\Leftrightarrow jedes Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, enthält unendlich viele Folgeelemente

Rekursive Approximation von Pi

a_n, b_n : halbe Umfänge der um- bzw. einbeschriebenen $(6 \cdot 2^n)$ -Ecke eines Einheitskreises

\rightsquigarrow rekursiv definierte, gegen $\pi = 3.1415926535897932 \dots$ konvergente Folgen

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}, \quad a_0 = 2\sqrt{3}, \quad b_0 = 3$$

Spezielle Grenzwerte von Folgen

a_n	$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n, q < 1$	0
$n^{-\alpha} \ln n, \alpha > 0$	0
$q^n / n!$	0
$n! / n^n$	0
$(1 + 1/n)^n$	e
$(1 - 1/n)^n$	$1/e$

3.5 Reihen

Grenzwert einer Reihe

Konvergenz \Leftrightarrow Konvergenz der Partialsummen

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \Leftrightarrow \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

notwendig: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

Harmonische Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$$

allgemeiner: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$, Konvergenz $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Absolut konvergente Reihen

Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

\Rightarrow Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, beliebige Umordnung der Summanden möglich

Majorante und Minorante einer Reihe

$$\sum_n |b_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_n |a_n| < \infty \quad \text{falls} \quad |a_n| \leq c|b_n|, \quad n \geq n_0$$

umgekehrt: Divergenz von $\sum_n |b_n| \Rightarrow$ Divergenz von $\sum_n |a_n|$,

falls $|a_n| \geq c|b_n|$ für alle bis auf endlich viele n

Quotientenkriterium

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \in (0, 1), \quad n > n_0$$

\Rightarrow absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$

alternativ: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| = q \in (0, 1)$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1, \quad n > n_0$$

\Rightarrow Divergenz von $\sum_n a_n$

Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1, \quad n > n_0$$

\implies absolute Konvergenz $\sum a_n$

alternativ: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1, \quad n > n_0$$

\implies Divergenz von $\sum a_n$

Leibniz-Kriterium

(a_k) monotone Nullfolge \implies Konvergenz der alternierenden Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots$$

Reihenrest: $|\sum_{k=n+1}^{\infty} \dots| \leq |a_{n+1}|$

Eulersche Zahl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad e = 2.71828182845905\dots$$

Spezielle Reihen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} aq^k &= a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \ln 2 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e \end{aligned}$$

3.6 Stetigkeit

Stetigkeit

$$x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a) \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ für } |x - a| < \delta_\varepsilon$$

Einseitige Stetigkeit

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f^-(a), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f^+(a)$$

Regeln für stetige Funktionen

f und g stetig \implies

$$f \pm g, \quad f/g \quad (g \neq 0), \quad f \circ g$$

stetig

Zwischenwertsatz

Annahme aller Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ für stetige Funktionen

Satz vom Maximum und Minimum

Existenz von Minimum und Maximum für stetige Funktionen auf einem endlichen abgeschlossenen Intervall

Gleichmäßige Stetigkeit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ für } |x - a| < \delta_\varepsilon$$

(δ_ε unabhängig von a)

3.7 Differentiationsregeln

Ableitung

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

alternative Schreibweisen: $f'(x) = dy/dx = (d/dx)f(x)$

Tangente: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Linearität der Ableitung

$$(rf)' = rf' \quad (r \in \mathbb{R}), \quad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

Ableitungen von Grundfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$x^r, r \neq 0$	rx^{r-1}
e^x	e^x	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

insbesondere: $(1/g)' = -g'/g^2$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

bzw. mit $f(y) = z$, $g(x) = y$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$y = f(x)$, $x = f^{-1}(y) \implies$

$$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$$

bzw. $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$

Logarithmische Ableitung

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)| \quad (f \neq 0)$$

\rightsquigarrow Differentiation von Funktionen der Form $y = g(x)^{h(x)}$ mit $g(x) > 0$

3.8 Anwendungen

Satz von Rolle

$$f(a) = f(b) \implies f'(c) = 0 \quad \text{für ein } c \in (a, b)$$

allgemeiner: n Nullstellen von f einschließlich Vielfachheiten \rightsquigarrow mindestens $n - k$ Nullstellen von $f^{(k)}$

Mittelwertsatz

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a) \quad \text{für ein } t \in (a, b)$$

Fehlerfortpflanzung

absoluter Fehler

$$|\Delta y| = |f'(x)| |\Delta x| + o(\Delta x)$$

relativer Fehler

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)| \frac{|x|}{|y|} \right) \frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

Abschätzung mit Hilfe geeigneter Schranken für f'

Landau-Symbole

$$f(x) = O(g(x)) \iff |f(x)| \leq c|g(x)|$$

für $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$$

Regel von l'Hospital

$f(a) = 0 = g(a)$ oder $|f(a)| = \infty = |g(a)| \implies$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert (gegebenenfalls im uneigentlichen Sinn)

3.9 Taylor-Entwicklung

Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

interpoliert Ableitungen von f

Restglied

$$R = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

für ein t zwischen a und x .

Newton-Verfahren

$$x_{\ell+1} = x_{\ell} - f(x_{\ell})/f'(x_{\ell})$$

quadratische Konvergenz gegen Nullstelle x_* von f

$$|x_{\ell+1} - x_*| \leq c |x_{\ell} - x_*|^2$$

Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

Konvergenz in einem Intervall $(a-r, a+r)$ mit

$$r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Binomialreihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

konvergent für $|x| < 1$

Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \rightsquigarrow$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$
$$\int f(x)dx = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k$$

Multiplikation von Taylor-Reihen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

mit $c_k = \sum_{j=0}^k f_{k-j}g_j$

Division von Taylor-Reihen

Koeffizienten von

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k / \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k, \quad g_0 \neq 0,$$

durch Koeffizientenvergleich aus der Identität

$$(g_0 + g_1u + \dots)(g_0 + g_1u + \dots) = f_0 + f_1u + \dots, \quad u = x - a$$

Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

Berechnung der Taylor-Koeffizienten der Umkehrfunktion g von f mit $f'(a) \neq 0$ im Punkt $b = f(a) \Leftrightarrow a = g(b)$ durch Differentiation von

$$g(f(x)) = x,$$

d.h.

$$g'(b) f'(a) = 1 \rightarrow g'(b), \quad g''(b) f'(a)^2 + g'(b) f''(a) = 0 \rightarrow g''(b), \quad \dots$$

Spezielle Taylor-Reihen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots \quad -1 < x \leq 1$$

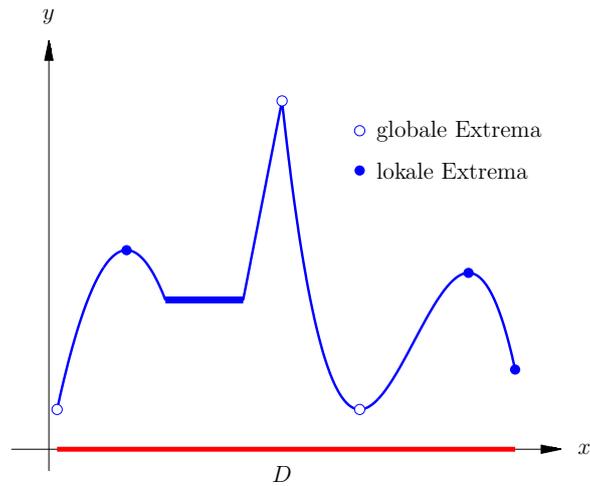
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \dots \quad |x| < 1$$

3.10 Extremwerte und Funktionsuntersuchung

Extremwert



Extremwerte nur an den Nullstellen der Ableitung, Unstetigkeitsstellen oder Randpunkten

Extremwerttest

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0 \quad (f''(a) < 0)$$

\implies lokales Minimum (Maximum) bei a

allgemeiner: Extremstelle, falls

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

mit n gerade

lokales Maximum (Minimum), falls $f^{(n)}(a) < 0$ ($f^{(n)}(a) > 0$)

Wendepunkte

Nullstelle a von f'' mit Vorzeichenwechsel

hinreichend: $f'''(a) \neq 0$

Asymptoten

lineare Funktion $p(x) = ax + b$ mit

$$f(x) - p(x) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty \quad \text{oder} \quad x \rightarrow -\infty$$

Funktionsuntersuchung

Bestimmung qualitativer Merkmale einer Funktion

- Symmetrien
- Periodizität
- Unstetigkeitsstellen
- Nullstellen (\rightarrow Vorzeichen)
- Extrema (\rightarrow Monotoniebereiche)
- Wendepunkte (\rightarrow Konvexitätsbereiche)
- Polstellen
- Asymptoten

Teil 4

Integralrechnung

4.1 Bestimmtes und unbestimmtes Integral

Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \int_a^b f_{\Delta} = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

mit $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ einer Zerlegung von $[a, b]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $|\Delta|$ der maximalen Länge der Teilintervalle und ξ_k einem beliebigem Punkt im k -ten Intervall

Eigenschaften des Integrals

- Linearität: $\int r f = r \int f$, $\int f + g = \int f + \int g$
- Monotonie: $f \leq g \implies \int f \leq \int g$
- Additivität: $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$, insbesondere $\int_b^a f = -\int_a^b f$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

g ohne Vorzeichenwechsel \implies

$$\int_a^b f g = f(c) \int_a^b g \quad \text{für ein } c \in [a, b]$$

insbesondere: $\int_a^b f = (b - a)f(c)$

Stammfunktion

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad F' = f$$

beliebige Integrationskonstante c

Stammfunktionen einiger Grundfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^s, s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$	$1/x$	$\ln x $
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

Hauptsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = F(b) - F(a), \quad F' = f$$

4.2 Integrationsregeln

Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

entsprechende Formel für bestimmte Integrale

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

kein Randterm für periodische Funktionen mit Periodenlänge $(b - a)$ und wenn eine der beiden Funktionen an den Intervallendpunkten Null ist

Dirac- und Heaviside-Funktion

$$\int_{\mathbb{R}} \delta f = f(0)$$

verallgemeinerte Ableitung der Heavisideschen Sprungfunktion

$$\delta = H', \quad H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Variablensubstitution

Substitution $y = g(x) \rightsquigarrow$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(y) + c = \int f(y) dy$$

bzw.

$$\int_a^b f(g(x)) \underbrace{g'(x)}_{dy/dx} dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

für bestimmte Integrale

4.3 Rationale Integranden

Elementare rationale Integranden

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{ax+b} &= \frac{1}{a} \ln|x+b/a| + c \\ \int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c \\ \int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{2} \ln((x-a)^2+b^2) + c\end{aligned}$$

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polstellen

$$\int (x-a)^{-n-1} dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c$$

rekursive Berechnung bei quadratischen Faktoren $q(x) = (x-a)^2 + b^2$ für mehrfache komplex konjugierte Polstellen

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}} dx = -\frac{c}{2nq(x)^n} + \frac{d(x-a)}{2b^2nq(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n} \int \frac{dx}{q(x)^n}$$

Partialbruchzerlegung

Darstellung als Summe der drei elementaren Grundtypen

$$ax^n, \quad \frac{c}{(ax+b)^n}, \quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

4.4 Trigonometrische Integranden

Integration trigonometrischer Polynome

$$\int \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \dots = 2\pi c_0$$

Integration von Polynomen in $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ mit Hilfe der Formel von Euler-Moivre

Trigonometrische Substitutionen

Substitutionen für algebraische Integranden

$$\begin{array}{lll} x = a \sin t : & dx = a \cos t dt & \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \\ x = a \tan t : & dx = a / \cos^2 t dt & \sqrt{a^2 + x^2} = a / \cos t \\ x = a / \cos t : & dx = a \sin t / \cos^2 t dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t \end{array}$$

Hyperbolische Substitutionen

Substitutionen für algebraische Integranden

$$\begin{array}{lll} x = a \sinh t : & dx = a \cosh t dt & \sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh t \\ x = a \cosh t : & dx = a \sinh t dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a \sinh t \end{array}$$

Rationale Funktionen von Sinus und Kosinus

Substitution $x = \tan(t/2) \rightsquigarrow$

$$\int r(\cos t, \sin t) dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2} dx$$

für eine beliebige rationale Funktion r

4.5 Uneigentliche Integrale

Uneigentliches Integral

Singularität bei b ($b = \infty$ oder unbeschränkter Integrand)

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f$$

Singularität an beiden Grenzen:

Grenzwert muss unabhängig von der Wahl der Folgen $c \rightarrow a+$, $d \rightarrow b-$ sein

hinreichend: absolute Integrierbarkeit, d. h.

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{const}$$

für alle Teilintervalle $[c, d] \subset (a, b)$

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

g absolut integrierbar, $|f(x)| \leq c|g(x)|$, $a < x < b$ (Majorante)

\implies absolute Integrierbarkeit von f auf $[a, b]$

Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x \in (0, \infty)$$

Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

insbesondere $\Gamma(n+1) = n!$

einfache Pole für $x = 0, -1, \dots$

Teil 5

Lineare Algebra

5.1 Gruppen und Körper

Gruppe

Menge G mit binärer Operation $\diamond : G \times G \mapsto G$

- Assoziativität: $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$
- Neutrales Element: $\exists! e \in G: e \diamond a = a \diamond e = a$
- Inverses Element: $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$

kommutativ oder abelsch $\Leftrightarrow a \diamond b = b \diamond a$

Untergruppe

Teilmenge U einer Gruppe G

abgeschlossen unter der Gruppenoperation von G , d.h.

$$a, b \in U \implies a \diamond b \in U, \quad a \in U \implies a^{-1} \in U$$

Permutationen und symmetrische Gruppe

Gruppe S_n der Bijektionen auf $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

$n!$ Elemente

Zyklenschreibweise von Permutationen

Zyklus: Bilder eines Elementes bei mehrfacher Ausführung der Permutation

\rightsquigarrow Zerlegung von $\pi \in S_n$, z.B.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (146)(23)(5) \quad \text{bzw.} \quad \pi = (146)(23)$$

Transposition und Signum einer Permutation

$\tau = (jk)$: Vertauschung von j und k

\rightsquigarrow Produktdarstellung von Permutationen

$$\pi = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$$

Vorzeichen (Signum) einer Permutation: $\sigma(\pi) = (-1)^m$

Körper

Menge K , auf der eine Addition $+$ und eine Multiplikation \cdot definiert sind

- $(K, +)$: abelsche Gruppe mit neutralem Element 0

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \\(a + b) + c &= a + (b + c) \\a + 0 &= a \\a + (-a) &= 0\end{aligned}$$

- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$: abelsche Gruppe mit neutralem Element 1

$$\begin{aligned}a \cdot b &= b \cdot a \\(a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\a \cdot 1 &= a \\a \cdot a^{-1} &= 1\end{aligned}$$

- Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Primkörper

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad p : \text{Primzahl}$$

Körper unter Addition und Multiplikation modulo p

Chinesischer Restsatz

Kongruenzen

$$\begin{aligned}x &= a_1 \pmod{p_1} \\&\dots \\x &= a_n \pmod{p_n}\end{aligned}$$

eindeutige Lösung $x \in \{0, \dots, P-1\}$, $P = p_1 \cdots p_n$, für teilerfremde Zahlen p_1, \dots, p_n

$$x = \sum_{k=1}^n a_k Q_k(P/p_k) \pmod{P}, \quad Q_k(P/p_k) = 1 \pmod{p_k}$$

5.2 Vektorräume

Vektorraum

abelsche Gruppe $(V, +)$, auf der eine Skalarmultiplikation \cdot mit Elementen aus einem Körper K mit den folgenden Eigenschaften definiert ist

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

Vektorraum der n-Tupel

$$K^n : a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1, \dots, a_n)^t, \quad a_i \in K$$

komponentenweise definierte Addition und Skalarmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n): n -Tupel reeller (komplexer) Zahlen

Unterraum

Teilmenge U eines K -Vektorraums V , die bzgl. der Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist:

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U$$

Linearkombination

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i$$

lineare Hülle $\text{span}(U)$: Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus U

Konvexkombination

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$

konvexe Hülle $\text{conv}(U)$: Menge aller Konvexkombinationen von Vektoren aus U

Lineare Unabhängigkeit

linear unabhängig:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0 \quad \implies \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

linear abhängig:

$$\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 : \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

(nicht-triviale Darstellung des Nullvektors)

Basis

$B = \{b_1, b_2, \dots\} \subset V$ Basis \Leftrightarrow

eindeutige Darstellbarkeit der Vektoren v des Vektorraums V als Linearkombination

$$v = \sum_k \lambda_k b_k$$

$\Leftrightarrow b_k$ linear unabhängig und $\text{span}(b_1, b_2, \dots) = V$

Dimension: $\dim V = |B|$

5.3 Skalarprodukt und Norm

Reelles Skalarprodukt

Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum V mit folgenden Eigenschaften

- Positivität:

$$\langle v, v \rangle > 0 \text{ für } v \neq 0$$

- Symmetrie:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

- Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

Komplexes Skalarprodukt

Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem komplexen Vektorraum V mit folgenden Eigenschaften

- Positivität:

$$\langle v, v \rangle > 0 \text{ für } v \neq 0$$

- Schiefsymmetrie:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

- Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

Euklidisches Skalarprodukt

$$y^* x = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$$

assoziierte Norm

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| |v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$$

Gleichheit genau dann wenn $u \parallel v$

bei reellem Skalarprodukt Definition eines Winkels $\alpha \in [0, \pi]$ via

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| |v|}$$

Norm

Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften

- Positivität:

$$\|v\| > 0 \quad \text{für } v \neq 0$$

- Homogenität:

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Norm, assoziiert mit einem Skalarprodukt

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Orthogonale Basis

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j$$

orthonormal, falls $|u_k| = 1$

eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{k=1}^n c_k u_k, \quad c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{|u_k|^2}$$

Norm: $|v|^2 = |c_1|^2 |u_1|^2 + \dots + |c_n|^2 |u_n|^2$

Orthogonale Projektion

Abbildung auf einen Unterraum U eines Vektorraums V

$$v \mapsto P_U(v) \in U \subset V, \quad \langle v - P_U(v), u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

u_1, \dots, u_k orthogonale Basis von $U \implies$

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^j \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k$$

Verfahren von Gram-Schmidt

induktive Orthogonalisierung einer Basis b_1, \dots, b_n

$$u_j = b_j - \sum_{k < j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k, \quad j = 1, \dots, n$$

$|\langle u_k, u_k \rangle| = 1$ bei Normierung, $u_j \leftarrow u_j / |u_j|$, nach jedem Schritt

5.4 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildung

Abbildung $L : V \rightarrow W$ zwischen Vektorräumen

- additiv:

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

- homogen:

$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

insbesondere: $L(0_V) = 0_W$, $L(-v) = -L(v)$

Komposition linearer Abbildungen

Hintereinanderausführung linearer Abbildungen $S : U \rightarrow V$, $T : V \rightarrow W$

\rightsquigarrow lineare Abbildung

$$T \circ S : U \rightarrow W, \quad (T \circ S)(u) = T(S(u))$$

Matrix

Rechteckschema mit m Zeilen und n Spalten

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

komponentenweise Definition von Operationen

$$C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad B = \lambda A \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Matrix einer linearen Abbildung

lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ zwischen Vektorräumen mit Basen $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $F = \{f_1, \dots, f_m\}$

eindeutig bestimmt durch die Bilder der Basisvektoren

$$L(e_j) = a_{1,j}f_1 + \cdots + a_{m,j}f_m$$

\rightsquigarrow lineare Abbildung der Koordinaten

$$w_F = Av_E \Leftrightarrow w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}v_j, \quad i = 1, \dots, m$$

Affine Abbildung

affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f(x) = Ax + v$$

v : Bild des Nullvektors

A : $m \times n$ -Matrix mit Spalten $a_{1:m,k} = f(e_k) - v$

Basiswechsel

Transformation der Koordinaten bei einem Basiswechsel $E \rightarrow E'$

$$v_{E'} = Av_E, \quad e_k = \sum_j a_{jk} e'_j$$

Bild und Kern

lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$

$$\text{Kern } L = \{v \in V : L(v) = 0\} \subseteq V$$

$$\text{Bild } L = \{w \in W : \exists v \in V \text{ mit } L(v) = w\} \subseteq W$$

$\dim V < \infty \implies$

$$\dim V = \dim \text{Kern}(L) + \dim \text{Bild}(L)$$

Inverse Abbildung

$L : V \rightarrow W$ injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern } L = 0_V$

\rightsquigarrow lineare Umkehrabbildung

$$w \mapsto v, \quad w = L(v)$$

5.5 Matrizenrechnung

Matrix-Multiplikation

$A : m \times n, B : n \times \ell \rightsquigarrow C : m \times \ell$

$$C = AB, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq \ell$$

Komposition der linearen Abbildungen $u \mapsto v = Bu, v \mapsto w = Av$

i.a. nicht kommutativ

Inverse Matrix

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Invertierung von Matrixprodukten: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Transponierte, adjungierte, symmetrische und hermitesche Matrix

transponierte Matrix

$$B = A^t \quad \Leftrightarrow \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

symmetrisch: $A = A^t$

adjungierte Matrix

$$C = A^* = \bar{A}^t \quad \Leftrightarrow \quad c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$$

selbst-adjungiert oder Hermitesch: $A = A^*$

Regeln

$$\begin{aligned} (AB)^t &= B^t A^t \quad \text{und} \quad (AB)^* = B^* A^*, \\ (A^t)^{-1} &= (A^{-1})^t \quad \text{und} \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \end{aligned}$$

Spur einer Matrix

$$\text{Spur}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

Regeln

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA), \quad \text{Spur}(T^{-1}AT) = \text{Spur}(A)$$

Rang einer Matrix

maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten bzw. Zeilen

Matrix-Norm

zugeordnet

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

submultiplikativ, d.h. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

euklidische Norm

$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : A^*Av = \lambda v\}$$

Zeilensummennorm

$$\|A\|_\infty = \max_j \sum_k |a_{jk}|$$

Orthogonale und unitäre Matrix

unitär: Spalten bilden orthonormale Basis

$$A^{-1} = \bar{A}^t = A^*$$

orthogonal: Spezialfall reeller Matrizen, $A^{-1} = A^t$

Invarianz der euklidischen Norm: $|Av| = |v|$

Normale Matrizen

$$A \text{ normal} \Leftrightarrow AA^* = A^*A, \quad A^* = \bar{A}^t$$

bzw. $AA^t = A^tA$ für reelles A

unitär, hermitesch, orthogonal oder symmetrisch \implies normal

Zyklische Matrizen

generiert durch zyklisches Verschieben der ersten Spalte

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

zyklische Struktur kompatibel mit Matrixmultiplikation

Positiv definite Matrix

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0$$

positive Diagonalelemente und Eigenwerte, positiv definite Inverse

semidefinit, falls $v^*Av \geq 0$

5.6 Determinanten

Determinante

Schreibweisen

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

mit a_k den Spalten von A

definierende Eigenschaften

- Multilinearität:

$$\det(\dots, \alpha a_j + \beta b_j, \dots) = \alpha \det(\dots, a_j, \dots) + \beta \det(\dots, b_j, \dots)$$

- Antisymmetrie:

$$\det(\dots, a_j, \dots, a_k, \dots) = -\det(\dots, a_k, \dots, a_j, \dots)$$

- Normierung:

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}$$

für die Einheitsvektoren e_k

Entwicklung als Summe n -facher Produkte

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}$$

mit $\sigma(i)$ dem Vorzeichen der Permutation (i_1, \dots, i_n)

Determinante als Volumen

Volumen des von a_1, \dots, a_n aufgespannten Spats

$$|\det A| = \text{vol} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\} = \text{vol}(A[0,1]^n)$$

Determinanten spezieller Matrizen

- Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$ für $i < j$ oder $i > j \implies$

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$$

- Blockdiagonalmatrix: Blockstruktur mit $A_{ij} = 0, i \neq j$, und quadratischen Diagonalblöcken $A_{ii} \implies$

$$\det A = \prod_{i=1}^k \det A_{ii}$$

- Orthogonale und unitäre Matrizen:

$$|\det U| = 1$$

Eigenschaften von Determinanten

$\det A$

- invariant bei Addition eines Vielfachen einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile)
- null bei zwei gleichen Spalten (Zeilen)
- Vorzeichenänderung bei Vertauschung von Spalten (Zeilen)

\rightsquigarrow sukzessive Transformation auf Dreiecksform

Regeln

$$\det A = \det A^t, \quad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}, \quad \det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Entwicklungssatz für Determinanten

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det \tilde{A}_{kj} \quad (\text{Entwicklung nach Zeile } k) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \det \tilde{A}_{i\ell} \quad (\text{Entwicklung nach Spalte } l) \end{aligned}$$

mit \tilde{A}_{ij} der Matrix, die durch Streichen der i -ten Zeile j -ten Spalte entsteht

5.7 Lineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \Leftrightarrow & Ax = b \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m & & \end{array}$$

homogen (inhomogen): $b = 0$ ($b \neq 0$)

überbestimmt, falls unlösbar (im Allgemeinen für $m > n$)

unterbestimmt, falls keine eindeutige Lösung (im Allgemeinen für $m < n$)

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \in \mathbb{R}^m$$

mit a_k den Spalten von A

(i) homogenes System ($b = 0$):

immer lösbar, linearer Lösungsraum Kern A

eindeutige Lösung $x = 0$, falls a_k linear unabhängig

(ii) inhomogenes System ($b \neq 0$):

lösbar genau dann wenn $b \in \text{Bild } A$ (b als Linearkombination von a_k darstellbar)

affiner Lösungsraum

$$x_* + \text{Kern } A$$

mit einer speziellen Lösung x_*

eindeutig, falls Kern $A = 0$

Cramersche Regel

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x_i \det A = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

mit a_k den Spalten der quadratischen Matrix A

eindeutige Lösung für beliebiges b , falls $\det A \neq 0$

$b = e_j$ (Einheitsvektoren) \rightsquigarrow Koeffizienten der Inversen $C = A^{-1}$

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A}$$

Rückwärts-Einsetzen

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

sukzessive Berechnung der Unbekannten

$$x_\ell = (b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n) / r_{\ell,\ell}, \quad \ell = n, \dots, 1$$

Gauß-Elimination

Transformation auf obere Dreiecksform

nach $\ell - 1$ Schritten

$$\begin{array}{cccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{\ell,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell,n}x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & a_{\ell+1,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell+1,n}x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{n,\ell}x_\ell & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

ℓ -ter Eliminationsschritt

- evtl. Vertauschung von Zeilen, so dass $a_{\ell,\ell} \neq 0$
- Subtraktion von Vielfachen der ℓ -ten Zeile:
für $i > \ell$ und $j \geq \ell$

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell} / a_{\ell,\ell})$$

\rightsquigarrow Nullen unterhalb von $a_{\ell\ell}$

Zeilenstufenform eines Gleichungssystems

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & p_1 & * \dots * \\ & 0 & 0 \dots 0 & p_2 & * \dots * \\ & & & 0 & 0 \dots 0 & p_3 & * \dots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

mit Pivots $p_1, \dots, p_k \neq 0$, $k = \text{Rang } A$

sukzessive Umformung analog zur Gauß-Elimination

Lösung eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 0 \dots 0 & p_1 & * \dots * & & & & & \\ & 0 & 0 \dots 0 & p_2 & * \dots * & & & \\ & & & 0 & 0 \dots 0 & p_3 & * \dots * & \\ & & & & & & \ddots & \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

mit Pivots $p_1, \dots, p_k \neq 0$

lösbar genau dann wenn $c_{k+1} = \dots = c_m = 0$

(i) $k = n \rightsquigarrow$ eindeutige Lösung

(ii) $k < n \rightsquigarrow n - k$ linear unabhängige Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems ($c_i = 0$)

Unbekannte, die den Spalten ohne Pivots entsprechen, frei wählbar

5.8 Eigenwerte, Normalformen und Singulärwertzerlegung

Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum

Eigenvektor v zum Eigenwert λ einer quadratischen Matrix A

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0$$

Eigenraum: $V_\lambda = \text{Kern}(A - \lambda E)$

Ähnlichkeitstransformation

Basiswechsel

$$A \rightarrow B = Q^{-1}AQ$$

erhält Eigenwerte

$$v \text{ Eigenvektor von } A \quad \Leftrightarrow \quad w = Q^{-1}v \text{ Eigenvektor von } B$$

Charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) \end{aligned}$$

Eigenwerte λ_k : Nullstellen von p_A

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \text{Spur } A, \quad \prod_{k=1}^n \lambda_k = \det A$$

Eigenvektoren v : nicht-triviale Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)v = 0$$

Konstruktion einer Basis für den Eigenraum $V_\lambda = \text{Kern}(A - \lambda E)$ durch Transformation auf Zeilenstufenform

Algebraische und geometrische Vielfachheit

algebraische Vielfachheit m_λ : Ordnung der Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

geometrische Vielfachheit d_λ : Dimension des Eigenraums $V_\lambda = \text{Kern}(A - \lambda E_n)$

Beziehungen zwischen m und d

$$d_\lambda \leq m_\lambda, \quad \sum_{\lambda} m_\lambda = n, \quad d_\lambda = n - \text{Rang}(A - \lambda E)$$

Summe und Produkt von Eigenwerten

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \text{Spur } A, \quad \prod_{k=1}^n \lambda_k = \det A$$

mehrfache Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt

Basis aus Eigenvektoren

Basis aus Eigenvektoren v_k mit Eigenwerten λ_k zu $A \rightsquigarrow$ Diagonalisierung

$$V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \dots, v_n)$$

5.9 Normalformen

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

Eigenvektoren: Spalten der Fourier-Matrix

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\dots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi i/n)$$

Diagonalform

$$\frac{1}{n} \overline{W} \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \dots, n-1$$

Unitäre Diagonalisierung

A normal, d.h. $A^*A = AA^*$ \Leftrightarrow

$$U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

mit einer unitären Matrix U (Spalten: orthonormale Basis aus Eigenvektoren)

Diagonalisierung hermitescher Matrizen

$A = A^*$ \implies reelle Eigenwerte und Orthonormalbasis aus Eigenvektoren u_k

$$U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad U = (u_1, \dots, u_n)$$

hermitesch \Leftrightarrow symmetrisch für reelle Matrizen

Rayleigh-Quotient

S hermitesch positiv definit \implies

$$r_S(x) = \frac{x^* S x}{x^* x}, \quad x \neq 0$$

für kleinsten und größten Eigenwert extremal

Jordan-Form

Ähnlichkeitstranformation auf die Blockdiagonalform

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

mit λ_i den Eigenwerten von A

Dominanter Eigenwert

λ betragsmäßig größter Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \implies$

$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

falls x eine nichttriviale Komponente im Eigenraum von λ hat

Konvergenz von Matrix-Potenzen

$$A^n \rightarrow 0 \iff |\lambda_k| < 1 \quad \forall k$$

A^n beschränkt $\iff |\lambda_k| \leq 1 \quad \forall k$ und $|\lambda_k| = 1$ nur für Eigenwerte mit gleicher algebraischer und geometrischer Vielfachheit

Divergenz von A^n in allen anderen Fällen

5.10 Ausgleichsprobleme

Ausgleichsgerade

lineare Approximation von Daten (t_k, f_k) durch Minimierung der Fehlerquadratsumme

$$\sum_{k=1}^n (f_k - p(t_k))^2, \quad p(t) = u + vt$$

eindeutig lösbar bei mindestens zwei verschiedenen Abszissen t_i

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}, \quad v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

Normalgleichungen

$$|Ax - b| \rightarrow \min \quad \Leftrightarrow \quad A^t Ax = A^t b$$

eindeutige Lösung x , falls die Spalten von A linear unabhängig sind

Singulärwert-Zerlegung

$$U^* AV = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}, \quad s_1 \geq \dots \geq s_k > s_{k+1} = \dots = 0$$

mit $k = \text{Rang } A$

singuläre Werte s_j : Wurzeln der Eigenwerte von A^*A

Spalten u_j von U und v_j von V : orthonormale Basen aus Eigenvektoren von AA^* bzw. A^*A

$$Av_j = s_j u_j, \quad Ax = \sum_{i=1}^k s_i (v_i^* x) u_i$$

Pseudo-Inverse

$$A^+ = VS^+U^*, \quad S^+ = \text{diag}(1/s_1, \dots, 1/s_k, 0, \dots, 0)$$

mit $s_i > 0$ den Singulärwerten von A

$x = A^+b$: Minimum-Norm-Lösung des Ausgleichsproblems $|Ax - b| \rightarrow \min$

Drehachse und Drehwinkel

Jede Drehung Q im \mathbb{R}^3 besitzt eine Drehachse, d.h. lässt einen Einheitsvektor u invariant, und entspricht einer ebenen Drehung um einen Winkel φ in der zu u orthogonalen Ebene.

Bezüglich eines orthonormalen Rechtssystems u, v, w besitzt Q die Matrixdarstellung

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt für den Drehwinkel

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (\text{Spur } Q - 1).$$

Quadrik

$$Q : x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

homogene Form: $Q : \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$ mit

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right), \quad \tilde{x}^t = (1, x_1, \dots, x_n)$$

Klassifizierung

- kegelige Quadrik: $\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A$
- Mittelpunktsquadrik: $\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 1$
- parabolische Quadrik: $\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 2$

Hauptachsentransformation

Drehung und Verschiebung \rightsquigarrow Normalform

$$x^t A x + 2b^t x + c = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma, \quad x = U w + v$$

mit $m = \text{Rang } A$ und $\beta\gamma = 0$

Spalten der Drehmatrix U : Eigenvektoren u_i (Hauptachsen) zu den Eigenwerten λ_i von A

Verschiebungsvektor v : Mittelpunkt der Quadrik

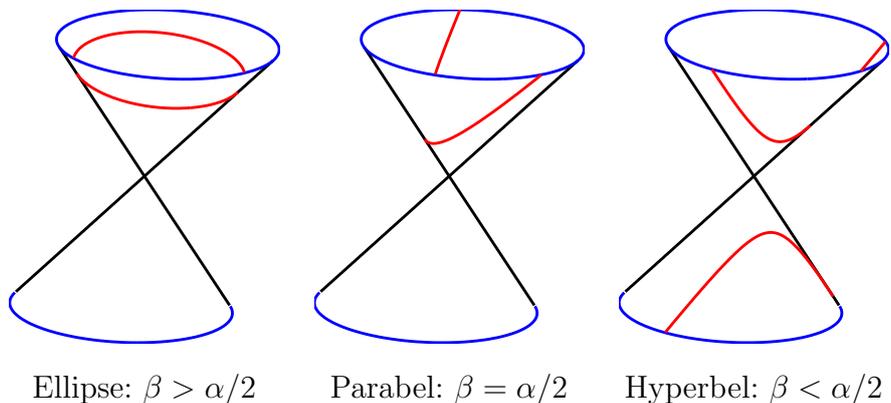
Kegelschnitt

Doppel-Kegel mit Spitze p ($p_3 \neq 0$), Richtung v und Öffnungswinkel α

$$K : (x - p)^t v = \pm \cos \frac{\alpha}{2} |x - p| |v|$$

Schnitt mit der Ebene $E : x_3 = 0 \rightsquigarrow$ ebene Quadrik

Typ bestimmt durch Winkel β der Achse mit der Ebene E



Euklidische Normalformen der zweidimensionalen Quadriken

- Kegelige Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punkt
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade

- Mittelpunktsquadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Hyperbel
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Ellipse
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	paralleles Geradenpaar

- Parabolische Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	Parabel

Euklidische Normalformen der dreidimensionalen Quadriken

- Kegelige Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	Punkt
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	(Doppel-)Kegel
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Gerade
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidende Ebenen
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelebene

- Mittelpunktsquadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	Ellipsoid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	elliptischer Zylinder
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge)
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	parallele Ebenen

- Parabolische Quadriken

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	elliptisches Paraboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	hyperbolisches Paraboloid
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	parabolischer Zylinder

Teil 6

Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

6.1 Topologie von Mengen

Umgebung

ε -Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$$

Umgebung U von x : Menge, die eine ε -Umgebung von x enthält

Offene Menge

D offen

\Leftrightarrow jeder Punkt in D besitzt eine Umgebung in D

\Leftrightarrow Komplement von D abgeschlossen

Inneres $\overset{\circ}{D}$ einer (beliebigen) Menge D : alle Punkte in D mit einer Umgebung in D

Abgeschlossene Menge

D abgeschlossen

\Leftrightarrow jede konvergente Folge von Punkten in D besitzt einen Grenzwert in D

\Leftrightarrow Komplement von D offen

Abschluss \bar{D} einer (beliebigen) Menge D : Menge aller Grenzwerte von Folgen in D

Rand einer Menge

$$\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D}$$

Punkte, die keine Umgebung besitzen, die ganz in D oder im Komplement von D liegt

Kompakte Menge

kompakt \Leftrightarrow beschränkt und abgeschlossen

äquivalente Charakterisierungen

- Jede Folge in D besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in D .
- Jede Überdeckung von D mit offenen Mengen besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

6.2 Funktionen

Multivariate Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x)$$

skalar- ($m = 1$) oder vektorwertig ($m > 1$)

Graph: $\{(x, f(x)) : x \in D\}$

Niveauflächen: $\{x \in D : f(x) = c\}$

Multivariate Polynome

$$p(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

totaler Grad $\leq m$: $\sum \alpha \leq m$, Dimension $\binom{m+n}{n}$

maximaler Grad $\leq m$: $\max_k \alpha_k \leq m$, Dimension $(m+1)^n$

homogen vom Grad m : $\sum \alpha = m$, Dimension $\binom{m+n-1}{n-1}$

Stetigkeit multivariater Funktionen

$$D \ni x_k \rightarrow x \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$$

Extremwerte stetiger Funktionen

Existenz von Minimum und Maximum auf einer kompakten Menge

Äquivalenz von Vektornormen

$$c_1 \|x\| \leq |x| \leq c_2 \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Lipschitz-Stetigkeit

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\| \quad \forall x, y \in D$$

für konvexe Mengen

$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)|$$

kontrahierend: $c < 1$

6.3 Konvergenz

Konvergenz einer Vektor-Folge

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ bzw. $x_k \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon : |x_k - x| < \varepsilon \quad \text{für } k > k_\varepsilon$$

\Leftrightarrow Konvergenz aller Komponenten

Cauchy-Kriterium für Vektor-Folgen

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_\varepsilon : |x_\ell - x_k| < \varepsilon \quad \text{für } \ell, k > k_\varepsilon$$

\Leftrightarrow Cauchy-Konvergenz aller Komponenten

Kontrahierende Abbildung

$$g : D \rightarrow D, \quad \|g(x) - g(y)\| \leq c \|x - y\| \quad \forall x, y \in D$$

mit Kontraktionskonstante $c < 1$

für konvexe Mengen

$$c \leq \sup_{x \in D} \|g'(x)\|$$

mit g' der Jacobi-Matrix

Banachscher Fixpunktsatz

g : kontrahierende Selbstabbildung einer nichtleeren abgeschlossenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, d.h.

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \implies g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \leq c \|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

mit $c < 1$

\implies Existenz eines eindeutigen Fixpunktes $x_* = g(x_*) \in D$

lineare Konvergenz einer Iterationsfolge (x_ℓ)

$$\|x_* - x_\ell\| \leq \frac{c^\ell}{1 - c} \|x_1 - x_0\|$$

6.4 Partielle Ableitungen

Partielle Ableitungen

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \partial_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_i + h, \dots) - f(\dots, x_i, \dots)}{h}$$

Ableitung der univariaten Funktion $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, bei der die Variablen x_j , $j \neq i$, als Konstanten betrachtet werden

Mehrfache partielle Ableitungen

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Multiindex-Notation

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ für glatte Funktionen f

Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

Sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion f stetig, so gilt

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

Für hinreichend glatte Funktionen ist also die Reihenfolge partieller Ableitungen vertauschbar. Insbesondere rechtfertigt dies die Multiindex-Schreibweise.

Totale Ableitung und Jacobi-Matrix

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(|h|), \quad |h| \rightarrow 0$$

Jacobi-Matrix

$$f' = Jf = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$$

Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

6.5 Ableitungsregeln

Multivariate Kettenregel

$$h = g \circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y)$$

Hintereinanderschaltung \rightsquigarrow Multiplikation der Jacobi-Matrizen

$$h'(x) = g'(y)f'(x), \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}$$

Richtungsableitung

$$\partial_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} = \left(\frac{d}{dt} f(x + tv) \right)_{t=0} = f'(x)v$$

bei skalarer Funktion: Anstieg von f in Richtung v , maximal für $v \parallel \text{grad } f$

6.6 Lineare Approximation und Taylor-Entwicklung

Tangente

Kurve $C : t \mapsto f(t)$

$f'(t_0) \neq 0 \rightsquigarrow$ berührende Gerade

$$g : f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

$f'(t_0) = 0 \rightsquigarrow$ abrupte Änderung der Tangentenrichtung möglich

Tangentialebene

implizit definierte Fläche

$$S : f(x_1, \dots, x_n) = c$$

$\text{grad } f(p) \neq 0 \rightsquigarrow$ Tangentialebene

$$E : (\text{grad } f(p))^t (x - p) = 0$$

Tangentialebene für den Graph einer Funktion $x \mapsto y = g(x_1, \dots, x_{n-1})$

$$E : y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q) (x_i - q_i)$$

Multivariate Taylor-Approximation

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) (x - a)^\alpha + R, \quad |x - a| < r,$$

mit $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$

Restglied

$$R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u) (x - a)^\alpha, \quad u = a + \theta(x - a),$$

für ein $\theta \in [0, 1]$

Hesse-Matrix

quadratische Taylor-Approximation einer skalaren Funktion f

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a) + (\text{grad } f(a))^t (x - a) + \frac{1}{2} (x - a)^t \text{H } f(a) (x - a) + \dots$$

mit

$$\text{H } f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n \partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

6.7 Anwendungen

Umkehrfunktion

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f'(x_*)$ invertierbar \implies

f in Umgebung U von x_* bijektiv, $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, und

$$g'(y) = f'(x)^{-1}, \quad x \in U$$

Implizite Funktionen

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x_*, y_*) = 0$ mit $\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \implies$

Gleichungen

$$f_k(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

lokal nach x auflösbar: $x = \varphi(y)$, $y \approx y_*$

Jacobi-Matrix

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y$$

Fehlerfortpflanzung bei multivariaten Funktionen

absoluter Fehler

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x) \Delta x_1 + \dots + f_{x_n}(x) \Delta x_n$$

relativer Fehler

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \dots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

mit den Konditionszahlen

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|}$$

Steilster Abstieg

iterative Minimierung multivariater Funktionen

$$x \rightarrow y: \quad f(y) = \min_{t \geq 0} f(x + td), \quad d = -\text{grad } f(x)$$

Konvergenz gegen kritische Punkte: $\text{grad } f(x_*) = 0$

Multivariates Newton-Verfahren

nichtlineares Gleichungssystem

$$f_1(x_*) = \dots = f_n(x_*) = 0, \quad x_* \in \mathbb{R}^n$$

iterative Approximation der Lösung x_*

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - \Delta x, \quad f'(x_{\text{alt}}) \Delta x = f(x_{\text{alt}})$$

$\det f'(x_*) \neq 0 \implies$ lokal quadratische Konvergenz

$$|x_{\text{neu}} - x_*| \leq c |x_{\text{alt}} - x_*|^2$$

6.8 Extremwerte

Kritischer Punkt

$\text{grad } f(x_*) = 0$, Typbestimmung mit Eigenwerten λ_k der Hesse-Matrix $Hf(x_*)$

- Flachpunkt: $\lambda_k = 0$
- elliptischer Punkt: $\lambda_k \neq 0$, gleiches Vorzeichen
- hyperbolischer Punkt: $\exists \lambda_k$ mit verschiedenem Vorzeichen
- parabolischer Punkt: λ_k gleiches Vorzeichen, mindestens ein λ_k null

Extrema multivariater Funktionen

innerer Punkt:

x_* lokales Extremum \implies

$$\text{grad } f(x_*) = 0$$

Minimum (Maximum), falls Eigenwerte der Hesse-Matrix H positiv (negativ)

bei zwei Variablen: $\det H > 0$ und $\text{Spur } H > 0$ (< 0)

Randpunkt:

Richtungsableitung $\partial_v f(x_*) > 0$ (< 0) für jede ins Innere zeigende Richtung v

Lagrange-Multiplikatoren

x_* lokale Extremstelle von f unter den Nebenbedingungen $g_k(x) = 0$,

$\text{Rang } g'(x_*)$ maximal \implies

\exists Lagrange-Multiplikatoren λ_k mit

$$f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)$$

Kuhn-Tucker-Bedingung

x_* lokales Minimum von f unter den Nebenbedingungen $g_i(x) \geq 0$,

Gradienten der aktiven Gleichungen linear unabhängig \implies

\exists Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_k \geq 0$ mit

$$\text{grad } f(x_*) = \sum_k \lambda_k \text{grad } g_k(x_*) \quad \wedge \quad \sum_k \lambda_k g_k(x_*) = 0$$

($\lambda_k \leq 0$ bei lokalem Maximum)

Teil 7

Mehrdimensionale Integration

7.1 Mehrdimensionale Integrale

Simplex

konvexe Hülle von $n + 1$ affin unabhängigen Punkten p_0, \dots, p_n in \mathbb{R}^n

$$S = \left\{ x = \sum_k \alpha_k p_k : \sum_k \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0 \right\}$$

Volumen

$$\text{vol } S = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0)|$$

Parallelepiped

aufgespannt von linear unabhängigen Vektoren a_1, \dots, a_n in \mathbb{R}^n

$$P = \left\{ x = \sum_i \alpha_i a_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

Volumen

$$\text{vol } P = |\det(a_1, \dots, a_n)|$$

Integrationsbereich

Elementarbereich:

begrenzt durch Graphen stetiger Funktionen nach geeigneter orthogonaler Koordinatentransformation

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1$$

$$a_2(x_1) \leq x_2 \leq b_2(x_1)$$

\vdots

$$a_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq b_n(x_1, \dots, x_{n-1})$$

regulärer Bereich:

bis auf Randkurven bzw. -flächen disjunkte endliche Vereinigung von Elementarbereichen

Mehrdimensionales Integral

Grenzwert von Riemann-Summen über regulärem Bereich

$$\int_V f dV = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta V_i, \quad \Delta V_i = \text{vol}(V_i), P_i \in V_i,$$

mit $|\Delta|$ dem maximalen Durchmesser der V_i (i.a. Simplicizes oder Parallelepipede)

alternative Schreibweisen: $\int_V f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \int_V f$

Satz von Fubini

Integral über Elementarbereich $V : a_j(x_1, \dots, x_{j-1}) \leq x_j \leq b_j(x_1, \dots, x_{j-1})$

$$\int_V f dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1$$

unabhängig von der Reihenfolge der Variablen, z.B.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

7.2 Variablentransformation

Transformation mehrdimensionaler Integrale

$$\int_U f \circ g |\det g'| dU = \int_V f dV, \quad V = g(U),$$

für eine bijektive Transformation g mit $\det g'(x) \neq 0, x \in U$

Spalten von g' orthogonal \implies

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|$$

$y = g(x) = Ax + b$ (affine Transformation) \implies

$$dy = |\det A| dx$$

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z \quad \implies \quad dx dy dz = \varrho d\varrho d\varphi dz$$

Integral über einen Zylinder $Z : 0 \leq \varrho \leq \varrho_0, 0 \leq z \leq z_0$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho_0} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varrho d\varphi dz$$

Volumenelement in Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta \quad \implies \quad dx dy dz = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Integral über eine Kugel $K : 0 \leq r \leq R$

$$\int_K f = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R f(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

7.3 Kurven- und Flächenintegrale

Kurvenintegral

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t)) |p'(t)| dt$$

für eine reguläre Parametrisierung $t \rightarrow p(t) \in \mathbb{R}^n$, $p'(t) \neq 0$

unabhängig von der Parametrisierung

$f = 1 \rightsquigarrow$ Länge von C

Eigenschaften des Kurvenintegrals

- linear:

$$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$$

- additiv:

$$\int_C f dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f, \quad C = C_1 \dot{\cup} C_2$$

Länge einer Kurve

Die Länge L einer Kurve mit stetig differenzierbarer Parametrisierung $t \mapsto p(t)$, $a \leq t \leq b$, ist

$$\int_a^b |p'(t)| dt.$$

Speziell gilt für eine Kurve in der xy -Ebene mit der Parameterdarstellung $p(t) = (x(t), y(t))$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Insbesondere hat der Graph einer Funktion $y = f(x)$, $x \in [c, d]$ die Länge

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Die Länge des Kurvenstücks zwischen $p(a)$ und $p(t)$,

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)| d\tau,$$

kann als kanonischer Kurvenparameter benutzt werden. Man erhält die sogenannte Parametrisierung nach Bogenlänge:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1.$$

Aufgrund des normierten Tangentenvektors gilt für diese kanonische Parametrisierung

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s)) ds$$

mit L der Länge von C .

Reguläre Parametrisierung eines Flächenstücks

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

mit einer im Inneren von R bijektiven Abbildung s und linear unabhängigen Vektoren $\partial_1 s(x), \dots, \partial_{n-1} s(x)$,
 $x \in \overset{\circ}{R}$

Tangentialebene: aufgespannt durch $\partial_k s(x)$

Flächennormale: Einheitsvektor $\xi(x) \perp \partial_k(x)$

Flächenintegral

$$\int_S f dS = \int_R (f \circ s) |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)| dR$$

mit $s : R \ni (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (y_1, \dots, y_n) \in S$ einer regulären Parametrisierung und $\xi(x)$ der (normierten) Flächennormale

Skalierungsfaktor der Flächenelemente:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)| dR$$

$f = 1 \rightsquigarrow$ Flächeninhalt von S

Flächenelement in Zylinderkoordinaten

$$\int_S f dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varphi dz$$

für einen Zylindermantel $S : (\varphi, z) \mapsto (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z)$

Flächenelement in Kugelkoordinaten

$$\int_S f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(R, \vartheta, \varphi) R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

für eine Kugel $S : (\vartheta, \varphi) \mapsto (R \sin \vartheta \cos \varphi, R \sin \vartheta \sin \varphi, R \cos \vartheta)$

7.4 Anwendungen

Schwerpunkt

Masse eines Körpers K mit Dichte ϱ

$$m = \int_K \varrho(x) dK$$

ν -te Koordinate des Massenschwerpunktes

$$s_\nu = m^{-1} \int_K x_\nu \varrho(x) dK$$

$\varrho(x) = 1 \rightsquigarrow$ geometrischer Schwerpunkt

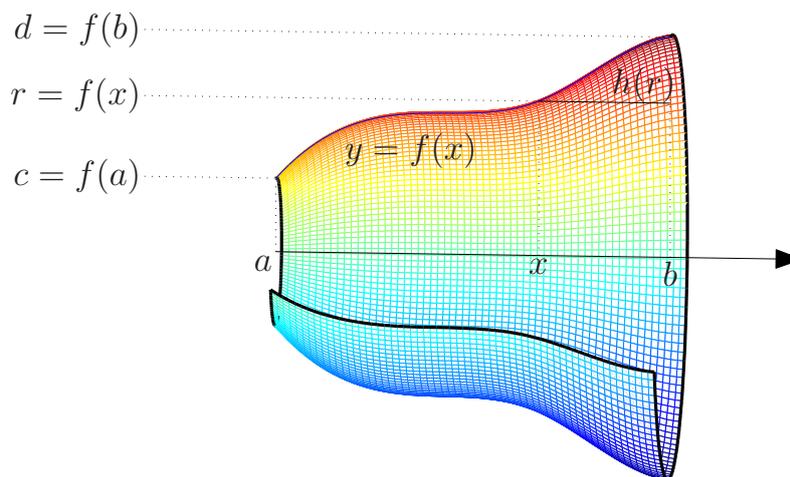
Trägheitsmoment

$$I = \int_K \text{dist}(x, g)^2 \varrho(x) dK$$

mit dist der Abstandsfunktion, g der Achse und ϱ der Dichte

Volumen von Rotationskörpern

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx \\ &= \pi c^2(b-a) + 2\pi \int_c^d rh(r) dr \end{aligned}$$



7.5 Integralsätze

Hauptsatz für Mehrfachintegrale

$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f \xi_\nu \Leftrightarrow \int_V \operatorname{grad} f = \int_{\partial V} f \xi$$

mit ξ der nach außen gerichteten Einheitsnormalen von ∂V

My partielle Integration bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

$$\int_V f (\partial_\nu g) = \int_{\partial V} f g \xi_\nu - \int_V (\partial_\nu f) g$$

mit ξ der nach außen gerichteten Einheitsnormalen von ∂V

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f \partial^\alpha g$$

für glatte Funktionen, die ausserhalb einer beschränkten Menge verschwinden oder genügend schnell abfallen

Greensche Integralformeln

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} f \partial_\perp g &= \int_V (\operatorname{grad} f)^t \operatorname{grad} g + f \Delta g \\ \int_{\partial V} f \partial_\perp g - g \partial_\perp f &= \int_V f \Delta g - g \Delta f \end{aligned}$$

mit $\partial_\perp g$ der Ableitung in Richtung der nach außen zeigenden Einheitsnormalen ξ von ∂V

$f = 1 \rightsquigarrow$

$$\int_{\partial V} \partial_\perp g = \int_V \Delta g$$

Teil 8

Vektoranalysis

8.1 Skalar- und Vektorfelder

Skalarfeld

$$\mathbb{R}^3 \ni P \mapsto U(P) \in \mathbb{R}$$

alternative Schreibweisen: $U = U(x, y, z) = U(\vec{r})$

Visualisierung durch Niveaumengen oder Einschränkungen auf achsenparallele Ebenen

Vektorfeld

$$\mathbb{R}^3 \ni P \mapsto \vec{F}(P) \in \mathbb{R}^3$$

alternative Schreibweisen: $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(\vec{r})$

Komponenten bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems: F_x, F_y, F_z

Visualisierung als Richtungsfeld oder mit Hilfe von Feldlinien

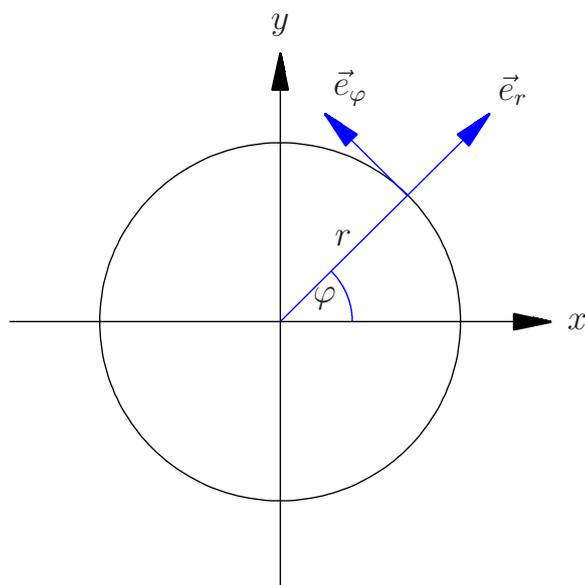
Vektorfelder in Polarkoordinaten

auf den Punkt $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ bezogene orthonormale Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

↔ Darstellung

$$\vec{F}(x, y) = \vec{F}(r, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi, \quad F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi$$



Vektorfelder in Zylinderkoordinaten

auf den Punkt $(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z)$ bezogene orthonormale Basis

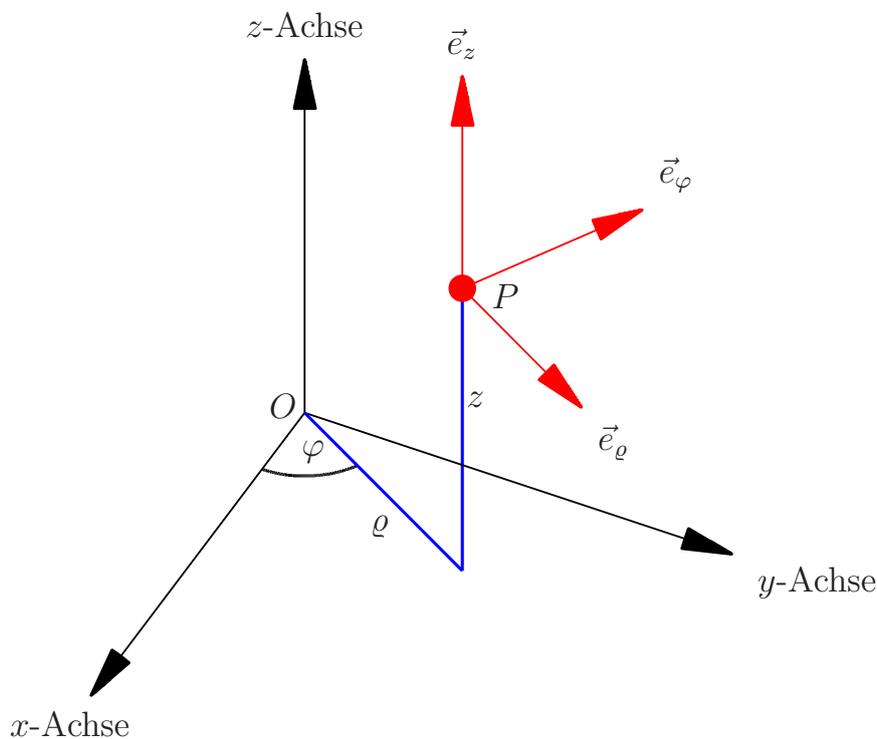
$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↪ Darstellung

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(\varrho, \varphi, z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

mit

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad F_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z$$



Vektorfelder in Kugelkoordinaten

auf den Punkt $(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta)$ bezogene orthonormale Basis

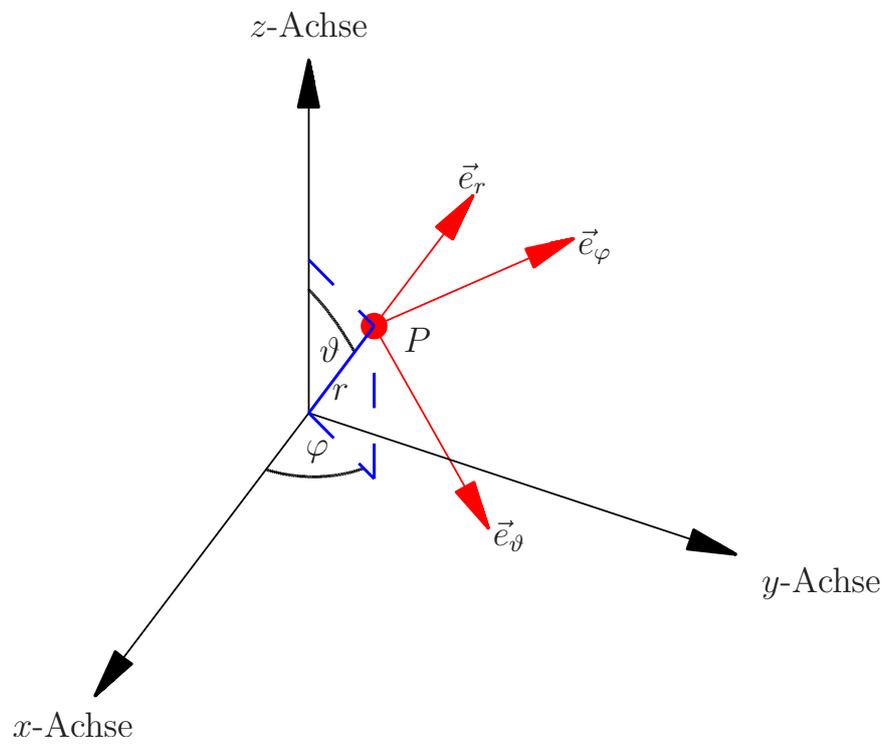
$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

↪ Darstellung

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\vartheta = \vec{F} \cdot \vec{e}_\vartheta, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi$$



8.2 Differentialoperatoren

Gradient

$$\text{grad } U = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix} \quad \text{für ein Skalarfeld } U(x, y, z)$$

entspricht Richtung des stärksten Anstiegs

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

alternative Definition:

$$\text{grad } U(P) = \lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S U d\vec{S}$$

mit S der Oberfläche eines den Punkt P enthaltenden räumlichen Bereichs V und nach außen orientiertem vektoriellen Flächenelement $d\vec{S}$

Divergenz

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

entspricht der Quelledichte

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

alternative Definition:

$$\text{div } \vec{F}(P) = \lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

mit S der Oberfläche eines den Punkt P enthaltenden räumlichen Bereichs V und $d\vec{S}$ dem nach außen orientierten vektoriellen Flächenelement

Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

entspricht der Wirbeldichte

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

Darstellung mit Hilfe des ε -Tensors

$$\left(\text{rot } \vec{F}\right)_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k, \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \vec{e}_i$$

alternative Definition:

$$(\vec{n}^\circ \cdot \text{rot } \vec{F})(P) = \lim_{\text{diam } S \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } S} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit regulären Flächen S mit orientiertem Rand $C : t \mapsto \vec{r}(t)$, die den Punkt P enthalten und dort die Normale \vec{n} haben

Laplace-Operator

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen

Rechenregeln für Differentialoperatoren

Hintereinanderschaltung

- $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$
- $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$
- $\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$

Produkte

- $\text{grad}(UV) = U \text{grad } V + V \text{grad } U$
- $\text{div}(U\vec{F}) = U \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } U$
- $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$
- $\text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$

Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Transformation von Skalar- und Vektorfeldern

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = \Psi_\varrho \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \Psi_z \vec{e}_z = \vec{\Psi}(\varrho, \varphi, z)$$

auf Zylinderkoordinaten $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = z$

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z \\ \text{div } \vec{F} &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho(\varrho \Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \partial_z \Psi_z \\ \text{rot } \vec{F} &= \left(\frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Psi_z - \partial_z \Psi_\varphi \right) \vec{e}_\varrho + (\partial_z \Psi_\varrho - \partial_\varrho \Psi_z) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\varrho} (\partial_\varrho(\varrho \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\varrho) \vec{e}_z \\ \Delta U &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho(\varrho \partial_\varrho \Phi) + \frac{1}{\varrho^2} \partial_\varphi^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi \end{aligned}$$

Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Transformation von Skalar- und Vektorfeldern

$$U(x, y, z) = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = \Psi_r \vec{e}_r + \Psi_\vartheta \vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi = \vec{\Psi}(r, \vartheta, \varphi)$$

auf Kugelkoordinaten $x = r \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi \\ \text{div } \vec{F} &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\vartheta) \\ \text{rot } \vec{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\vartheta) \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\varphi \Psi_r - \sin \vartheta \partial_r (r \Psi_\varphi)) \vec{e}_\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{r} (\partial_r (r \Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta \Psi_r) \vec{e}_\varphi \\ \Delta U &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi) \end{aligned}$$

8.3 Integration

Kurvenintegral

$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r}) |\vec{r}'(t)| dt$$

für eine Kurve $C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^t$ und ein Skalarfeld $U(x, y, z)$ unabhängig von der Parametrisierung und insbesondere der Orientierung

Weg

Kurve mit festgelegtem Durchlaufsin

$$C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

zusammengesetzte Wege: $C_1 + \dots + C_m$

Weg mit umgekehrtem Durchlaufsin: $-C$

Arbeitsintegral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

für einen Weg $C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^t$ und ein Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$

bei gleichbleibender Orientierung unabhängig von der Parametrisierung;

Änderung des Vorzeichens bei Umkehrung der Durchlaufrichtung

alternative Schreibweise:

$$\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt, \quad dz = z'(t) dt$$

Flächenintegral

$$\iint_S U dS = \iint_D U(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

für eine Fläche $S : D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^t$ und ein Skalarfeld $U(x, y, z)$

unabhängig von der Parametrisierung

Flussintegral

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) dudv$$

für eine Parametrisierung $D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^t$ der Fläche S und mit

$$d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS, \quad dS = |\vec{n}(u, v)| dudv$$

dem vektoriellen Flächenelement in Richtung der Normalen $\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$

bei gleicher Orientierung des Normalenvektors unabhängig von der Parametrisierung; Änderung des Vorzeichens bei Umkehrung der Normalenrichtung

Fluss durch einen Funktionsgraph

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z dx dy$$

für eine skalare Funktion $z = f(x, y)$ mit Definitionsbereich D und Graph S (Normale mit positiver z -Komponente)

Fluss durch einen Zylindermantel

Randkurve $\varrho = \varrho(\varphi) \rightsquigarrow$

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho dz d\varphi, \quad \vec{F}(\varrho, \varphi, z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

(Flussrichtung nach außen)

$\varrho = a$ (Kreiszyylinder) \rightsquigarrow

$$a \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho dz d\varphi$$

Fluss durch eine Kugel

Radius $r = a \rightsquigarrow$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta, \quad \vec{F}(r, \vartheta, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

radiales Feld $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r \rightsquigarrow$ Fluss $4\pi a^2 f(a)$

8.4 Integralsätze

Orientierter Rand einer Fläche

$$\partial S = C = C_1 + \cdots + C_m$$

S links von C_i , d.h. das Kreuzprodukt aus Normale \vec{n} von S und Tangentenvektor \vec{t} von C zeigt in die Fläche

Satz von Gauß

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

mit S der Oberfläche eines Körpers V und $d\vec{S}$ dem nach außen gerichteten vektoriellen Flächenelement

Volumenberechnung mit Hilfe des Satzes von Gauß

$$\operatorname{vol}(V) = \frac{1}{3} \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}$$

mit $S = \partial V$ und $d\vec{S}$ dem nach außen gerichteten vektoriellen Flächenelement

Satz von Gauß in der Ebene

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dC = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}, \quad \vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

mit

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y, \quad \vec{F} \times d\vec{r} = F_x y'(t) - F_y x'(t)$$

und $\partial A = C : t \mapsto \vec{r}(t)$ dem orientierten Rand von A

Flächenberechnung mit dem Satz von Gauß

$$\operatorname{area}(A) = \frac{1}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

mit $\partial A = C : t \mapsto \vec{r}(t)$ dem orientierten Rand von A

Satz von Green

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

mit $C : t \mapsto \vec{r}(t)$ dem orientierten Rand von A

Satz von Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit C dem orientierten Rand der Fläche S

8.5 Potentialtheorie

Potential

U Potential von $\vec{F} \Leftrightarrow$

$$\vec{F} = \text{grad } U$$

Arbeitsintegral entspricht Potentialdifferenz

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) = [U]_A^B$$

für jeden Weg $C : t \mapsto \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ von A nach B

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ für geschlossene Wege

Existenz eines Potentials

Existenz eines Potentials \Leftrightarrow Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals \Leftrightarrow

$$U(P) = U(P_0) + \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit $C_P : t \mapsto \vec{r}(t)$ einem beliebigen Weg, der P_0 mit P verbindet

Potential bis auf eine Konstante eindeutig

Integrabilitätsbedingung

$$\vec{F} = \text{grad } U \quad \Longrightarrow \quad \text{rot } \vec{F} = 0$$

Umkehrung gültig für einfach zusammenhängende Gebiete

Konstruktion eines Potentials

$$\text{grad } U = \vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^t$$

Integration von F_x bzgl. $x \rightsquigarrow$

$$U(x, y, z) = \int F_x dx = U_1(x, y, z) + C_1(y, z)$$

Integration von $F_y = \partial_y U = \partial_y U_1 + \partial_y C_1$ bzgl. $y \rightsquigarrow$

$$C_1(y, z) = \int (F_y - \partial_y U_1) dy = U_2(y, z) + C_2(z)$$

Integration von $F_z = \partial_z U = \partial_z U_1 + \partial_z U_2 + \partial_z C_2$ bzgl. $z \rightsquigarrow$

$$C_2(z) = \int (F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2) dz = U_3(z) + c$$

Hakenintegral

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^t = \text{grad } U \rightsquigarrow$$

$$U(Q) = U(P) + \int_{p_1}^{q_1} F_x(x, p_2, p_3) dx + \int_{p_2}^{q_2} F_y(q_1, y, p_3) dy + \int_{p_3}^{q_3} F_z(q_1, q_2, z) dz$$

analoge Integrale bei Permutation der Koordinaten

Vektorpotential

\vec{A} Vektorpotential von $\vec{F} \Leftrightarrow$

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A}$$

Existenz eines Vektorpotentials

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A} \implies \text{div } \vec{F} = 0$$

Umkehrung gültig auf einfach zusammenhängendem Gebiet

Vektorpotential bis auf ein Gradientenfeld eindeutig bestimmt:

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \implies \vec{B} = \vec{A} + \text{grad } U$$

$$-\Delta U = \text{div } \vec{A} \text{ (Eichung)} \rightsquigarrow \text{div } \vec{B} = 0$$

Konstruktion eines Vektorpotentials

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ - \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \end{pmatrix}$$

analoge Formeln durch zyklisches Vertauschen der Variablen

Teil 9

Differentialgleichungen

9.1 Spezielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y), \quad y = y(x)$$

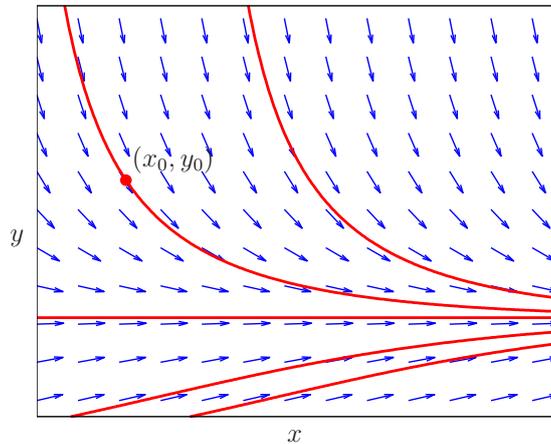
Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow$ Festlegung der Integrationskonstante

Richtungsfeld

Visualisierung der durch die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

bestimmten Steigungen von Lösungskurven, festgelegt durch Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$



Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = py + q$$

allgemeine Lösung

$$y = y_p + y_h$$

mit

$$y_h = c \exp(P(x)), \quad P(x) = \int_{x_0}^x p(s) ds$$

der allgemeinen Lösung der der homogenen Differentialgleichung ($q(x) = 0$) und einer partikulären Lösung

$$y_p = \int_{x_0}^x \exp(P(x) - P(s))q(s) ds$$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow c = y_0$

Bernoullische Differentialgleichung

$$u' + pu = qu^k, \quad k \neq 0, 1,$$

Substitution

$$y = u^{1-k}, \quad y' = (1-k)u^{-k}u'$$

↪ lineare Differentialgleichung

$$\frac{1}{1-k} y' = -py + q$$

Methode der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = py + q, \quad p \in \mathbb{R}$$

Ansätze für partikuläre Lösungen y_p

- $q(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j \rightarrow y_p = \sum_{j=0}^n d_j x^j$
- $q(x) = c \exp(\lambda x), \lambda \neq p, \rightarrow y_p = \frac{c}{\lambda - p} \exp(\lambda x)$
- $q(x) = c \exp(px) \rightarrow y_p = cx \exp(px)$
- $q(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) \rightarrow y_p = c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)$

allgemeine Lösung

$$y = y_p + c \exp(px)$$

Separable Differentialgleichung

$$y' = \underbrace{p(x)g(y)}_{f(x,y(x))}$$

Lösung durch Bilden von Stammfunktionen

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x) dx$$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow$ Festlegung der Integrationskonstante

Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

$$y' = f(y/x)$$

Substitution

$$xz(x) = y(x), \quad z + xz' = f(z)$$

↪ separable Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

Exakte Differentialgleichung

$$q(x, y)y' + p(x, y) = 0$$

mit

$$p = F_x, \quad q = F_y \quad \Leftrightarrow \quad (p, q)^t = \text{grad } F$$

notwendig: Integrabilitätsbedingung $p_y = q_x$

hinreichend bei einfach zusammenhängendem Definitionsgebiet

implizite Darstellung der Lösungen

$$F(x, y) = c$$

Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0 \rightsquigarrow$ Festlegung der Integrationskonstante

Integrierender Faktor

Multiplikation der Differentialgleichung

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

mit einer Funktion $a(x, y)$, die auf eine exakte Differentialgleichung führt, d.h.

$$(ap)_y = (aq)_x$$

9.2 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Linearer Oszillator

$$u'' + \omega_0^2 u = c \cos(\omega t), \quad \omega_0 > 0$$

allgemeine Lösung: $u = u_h + u_p$ mit

$$u_h(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

und

$$u_p(t) = \frac{c}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)), \quad \omega \neq \omega_0$$

sowie

$$u_p(t) = \frac{c}{2\omega} t \sin(\omega t)$$

im Resonanzfall $\omega = \omega_0$

Anfangsbedingungen \rightsquigarrow Festlegung der Konstanten

$$a = u(0), \quad b = u'(0)/\omega_0$$

Homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + p\lambda + q$$

verschiedene Lösungstypen

- zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$u(t) = a \exp(\lambda_1 t) + b \exp(\lambda_2 t)$$

- eine doppelte Nullstelle λ :

$$u(t) = a \exp(\lambda t) + bt \exp(\lambda t)$$

- zwei komplex konjugierte Nullstellen $-p/2 \pm \rho i$:

$$u(t) = \exp\left(-\frac{pt}{2}\right) (a \cos(\rho t) + b \sin(\rho t))$$

Anfangsbedingungen für u und u' \rightsquigarrow Festlegung der Konstanten a, b

Methoden der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = f(t), \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Ansätze für partikuläre Lösungen

- Polynome:

$$f(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^j \quad \rightarrow \quad u(t) = \sum_{j=0}^n u_j t^j$$

Multiplikation von u mit t (t^2), falls $q = 0$ ($q = p = 0$)

- Exponentialfunktionen:

$$f(t) = \exp(\lambda t) \quad \rightarrow \quad u(t) = c \exp(\lambda t),$$

Multiplikation von u mit t (t^2), falls λ Nullstelle (doppelte Nullstelle) des charakteristischen Polynoms

- Trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp(\alpha t)(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) \\ \rightarrow u(t) &= \exp(\alpha t)(a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Multiplikation von u mit t , falls $\alpha \pm i\omega$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + p\lambda + q$

Superposition der Ansätze bei gemischten Termen

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c \cos(\omega t), \quad r > 0$$

verschiedene Lösungstypen der homogenen Gleichung

- starke Dämpfung ($r > \omega_0$):

$$u_h = a \exp(\lambda_1 t) + b \exp(\lambda_2 t), \quad \lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

- kritische Dämpfung ($r = \omega_0$):

$$u_h = (a + bt) \exp(-rt)$$

- schwache Dämpfung ($r < \omega_0$):

$$u_h = \exp(-rt) (a \cos(\lambda t) + b \sin(\lambda t)), \quad \lambda = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$$

partikuläre Lösung

$$u_p(t) = c' \cos(\omega t + \delta)$$

mit Amplitude $c' = c / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$ und Phase $\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - i2r\omega)$

allgemeine Lösung: $u = u_h + u_p$

Phasenebene

autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

Lösungen: Kurven $t \mapsto (u(t), v(t))$, $v = u'$, in der Phasenebene

$f(u_0, 0) = 0 \rightsquigarrow$ kritischer Punkt $(u_0, 0)$ bzw. konstante Lösung $u(t) = u_0$

äquivalente Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dv}{du}v = f(u, v), \quad v = v(u)$$

Energieerhaltung

$$u'' + \Phi'(u) = 0$$

eindimensionale Bewegung unter einem durch ein Potential Φ induzierten Kraftfeld

Summe kinetischer und potentieller Energie

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(u), \quad v = u'$$

\rightsquigarrow implizite Darstellung von Lösungskurven in der Phasenebene: $E(u, v) = \text{const}$

9.3 Nichtlineare Differentialgleichungssysteme in Standardform

System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u = (u_1, \dots, u_n)^t, \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Anfangsbedingung: $u(t_0) = a$

autonomes System: $f = f(u)$

Transformation eines Differentialgleichungssystems auf Standardform

Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

Elimination höherer Ableitungen via $u(t) = (y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

\rightsquigarrow äquivalentes System erster Ordnung

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= g(t, u(t)) \end{aligned}$$

Satz von Peano

f in einer Umgebung D von $(t_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig

\implies Existenz mindestens einer Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = a$$

in D

Eindeutigkeit der Lösung eines Differentialgleichungssystems

$f(t, u)$ in einer Umgebung $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ von (t_0, a) Lipschitz-stetig bzgl. u

\implies eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = a$$

in D

Ableitung nach Anfangsbedingungen

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = a$$

partielle Ableitung nach den Anfangsbedingungen $(a_1, \dots, a_n)^t$

\rightsquigarrow Differentialgleichungssystem für die Jacobi-Matrix

$$u'_a = f_u(t, u)u_a, \quad u_a(t_0) = E,$$

mit der Einheitsmatrix E und

$$u_a = \left(\frac{\partial u}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial a_n} \right)$$

9.4 Lineare Differentialgleichungssysteme und Stabilität

Lineares Differentialgleichungssystem

$$u' = A(t)u + b(t), \quad u = (u_1, \dots, u_n)^t,$$

mit einer $(n \times n)$ -Matrix A und einem n -Vektor b

homogen: $b = 0$

Lösung linearer Differentialgleichungssysteme

A, b stetig

\implies globale Existenz einer eindeutigen Lösung von

$$u' = A(t)u + b(t)$$

für jeden Anfangswert $u(t_0)$

n linear unabhängige Lösungen v, w, \dots des homogenen Systems $u' = A(t)u$

\rightsquigarrow Fundamentalmatrix

$$\Gamma = (v, w, \dots)$$

Lösung

$$u = u_p + u_h, \quad u_h = \Gamma c, \quad c = \Gamma^{-1}(t_0)(u(t_0) - u_p(t_0)),$$

mit u_p einer partikulären Lösung

Wronski-Determinante

$$(\det \Gamma)' = \text{Spur } A(t) (\det \Gamma)$$

für eine Fundamentalmatrix Γ des Differentialgleichungssystems $u' = A(t)u$

\implies

$$\det \Gamma(t) = \det \Gamma(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Spur } A(s) ds \right) > 0$$

insbesondere: $\det \Gamma(t) > 0$

Variation der Konstanten

$$u' = A(t)u + b(t)$$

Lösung des homogenen Systems ($b = 0$)

$$u_h(t) = \Gamma(t)c$$

mit Γ einer Fundamentalmatrix

Ansatz $u(t) = \Gamma(t)c(t) \rightsquigarrow$

$$u(t) = \Gamma(t) \left[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^t \Gamma(s)^{-1}b(s) ds \right]$$

Eigenlösungen eines Differentialgleichungssystems

$Av = \lambda v \implies$

$$u(t) = \exp(\lambda t)v \quad \text{löst} \quad u' = Au$$

A reell, $\lambda = \sigma \pm \rho i \rightsquigarrow$ reelle Lösungen

$$\exp(\sigma t)(\cos(\rho t) \operatorname{Re} v - \sin(\rho t) \operatorname{Im} v), \quad \exp(\sigma t)(\sin(\rho t) \operatorname{Re} v + \cos(\rho t) \operatorname{Im} v)$$

Entkopplung des inhomogenen Systems

$$u' = Au + b(t)$$

für diagonalisierbares A

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad Q = (v_1, \dots, v_n)$$

$\implies v'_i = \lambda_i v_i + c_i(t)$ mit $u = Qv$, $c = Q^{-1}b$ und

$$v_i(t) = \exp(\lambda_i t) \left(\exp(-\lambda_i t_0)v_i(t_0) + \int_{t_0}^t c_i(s) \exp(-\lambda_i s) ds \right)$$

Jordan-Form eines Differentialgleichungssystems

$$u' = Au + b(t), \quad u = (u_1, \dots, u_n)^t$$

Transformation auf Jordan-Form,

$$A \rightarrow J = Q^{-1}AQ, \quad u = Qv, \quad c = Q^{-1}b$$

\rightsquigarrow bidiagonales System (sukzessive lösbar)

$$\begin{aligned} v'_n &= \lambda_n v_n + c_n(t) \\ v'_{n-1} &= \lambda_{n-1} v_{n-1} + \rho_n v_n + c_{n-1}(t) \\ &\vdots \\ v'_1 &= \lambda_1 v_1 + \rho_2 v_2 + c_1(t) \end{aligned}$$

mit λ_i den Eigenwerten von A (bzw. Diagonalelementen von J) und $\rho_i \in \{0, 1\}$

Stabilität linearer Differentialgleichungssysteme

$$u' = Au, \quad u = (u_1, \dots, u_n)^t$$

mit konstanter Matrix A

- stabil, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0$$

für alle Anfangswerte $u(0)$

- neutral stabil, wenn Lösungen $u(t)$ für alle $t > 0$ beschränkt bleiben und es Startwerte $u(0)$ gibt, für die $u(t)$ nicht gegen 0 konvergiert
- instabil, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = \infty$$

für einen Anfangswert $u(0)$

Stabilität $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte von A

instabil, falls $\operatorname{Re} \lambda > 0$ für einen Eigenwert

Klassifizierung reeller zweidimensionaler Differentialgleichungssysteme

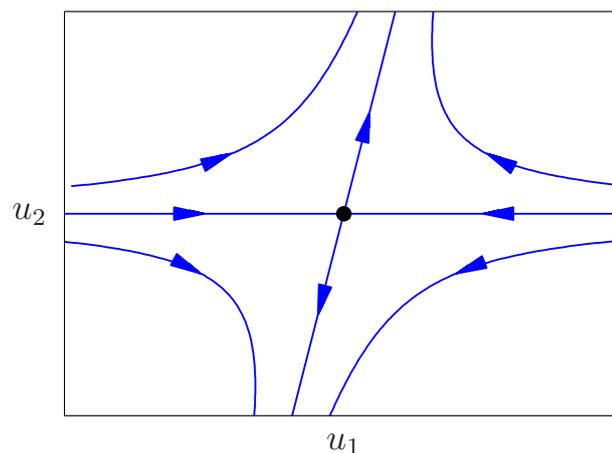
$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^t,$$

A : reelle 2×2 -Matrix mit Jordan-Normalform

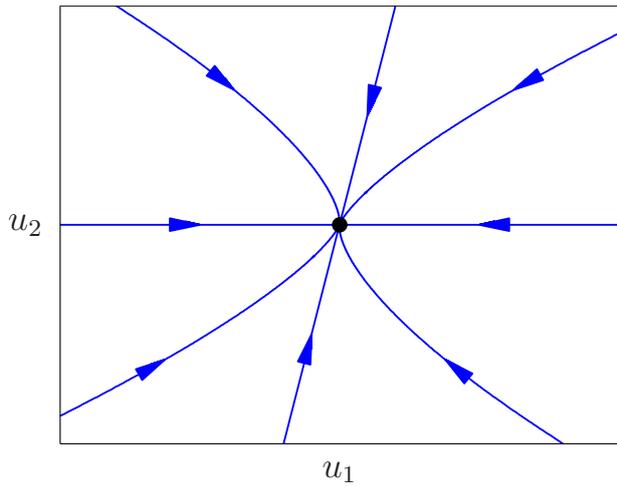
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, \quad s \in \{0, 1\}$$

typische Lösungskurven des transformierten Systems $v' = Jv$

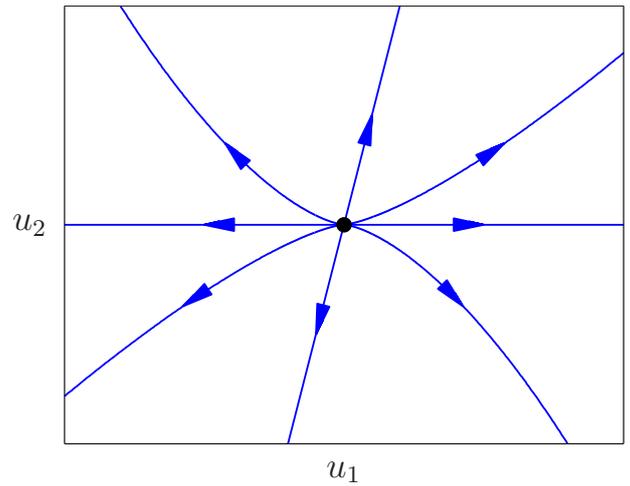
- Instabiler Sattel: $\lambda \varrho < 0$



- Knoten: $\lambda \rho > 0, \lambda, \rho \in \mathbb{R}$

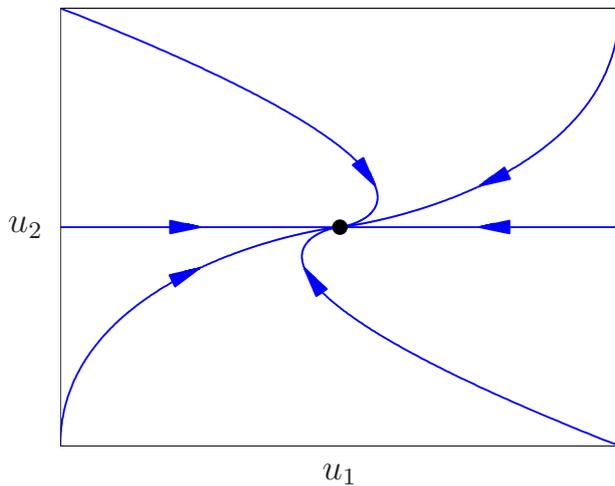


stabil, $\lambda, \rho < 0$

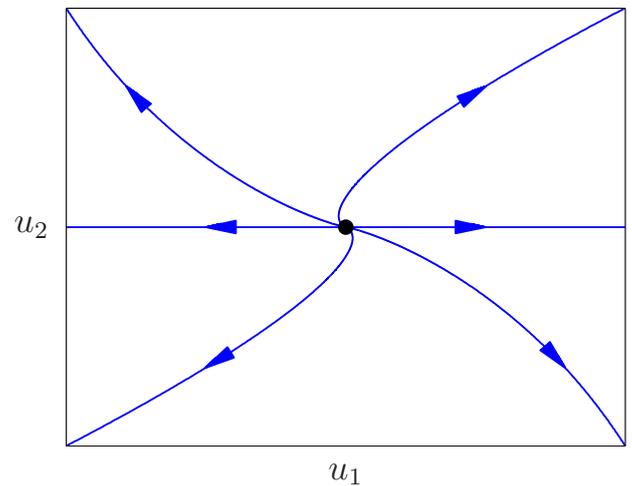


instabil, $\lambda, \rho > 0$

- entarteter Knoten ($s = 1$, keine Basis aus Eigenvektoren)

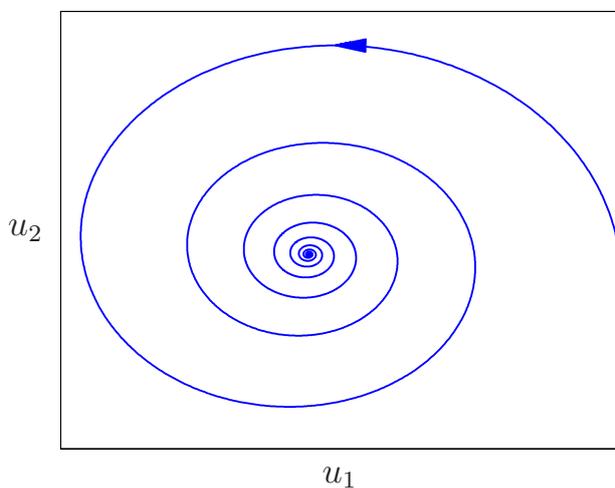


stabil, $\lambda < 0$

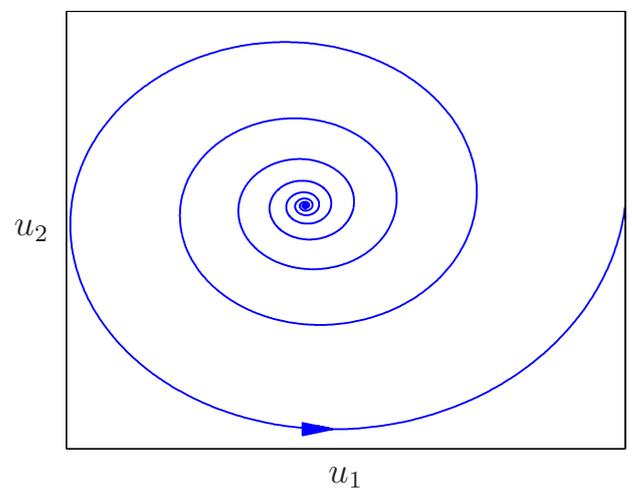


instabil, $\lambda > 0$

- Spirale: $\lambda = r + i\omega = \bar{\rho}, r\omega \neq 0$

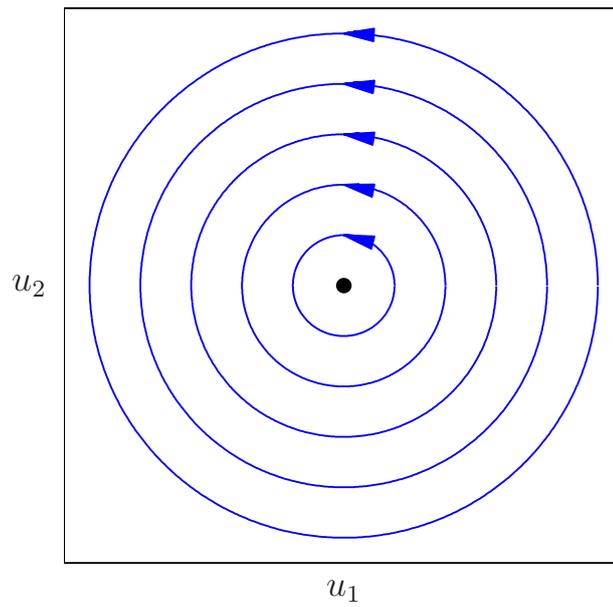


stabil, $r < 0$

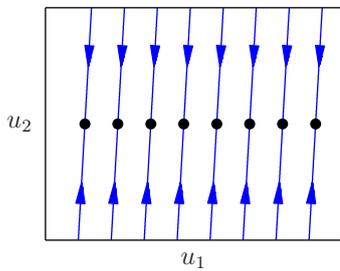


instabil, $r > 0$

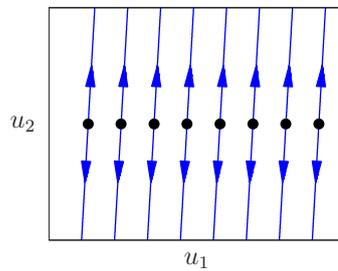
- Zentrum: $\lambda = i\omega = \bar{\rho}$, $\omega \neq 0$



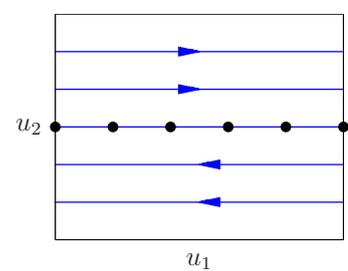
- degenerierte Fälle, mit einem Eigenwert null



$$\lambda = 0, \rho < 0$$



$$\lambda = 0, \rho > 0$$



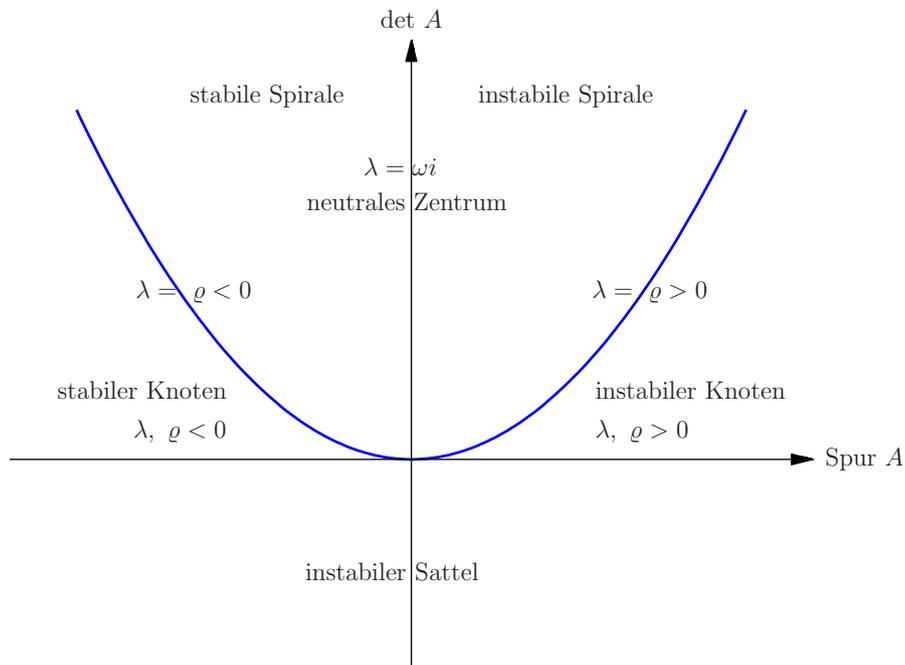
$$\lambda = 0, \rho = 0, s = 1$$

Ruhepunkte entlang der gesamten v_1 -Achse

Stabilitätsdiagramm

zweidimensionales Differentialgleichungssystem

$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^t$$



Parabel (trennt Fälle Spirale/Knoten)

$$\det A = \left(\frac{\text{Spur } A}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \lambda = \rho$$

Kritische Punkte eines autonomen Differentialgleichungssystems

autonome Differentialgleichung

$$u' = f(u), \quad u = (u_1, \dots, u_n)^t$$

kritischer Punkt: Nullstelle u_* von f , entspricht konstanter Lösung ($u(t) = u_*$)

Linearisierung

$$v' = f'(u_*)v$$

mit $v(t) = u(t) - u_*$ und f' der Jacobi-Matrix von f

Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungssysteme

autonomes Differentialgleichungssystem

$$u' = f(u)$$

kritischer Punkt u_* stabil

$\Leftrightarrow \text{Re } \lambda < 0$ für alle Eigenwerte λ von $A = f'(u_*)$

$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_*$ für alle Anfangswerte $u(0)$ in einer Umgebung von u_*

Typeneinteilung (stabiler Knoten oder Spirale) analog zum approximierenden linearen Differentialgleichungssystem

$$v' = Av, \quad v(t) = u(t) - u_*$$

9.5 Laplace-Transformation

Laplace-Transformation

$u(t) \exp(-at)$ auf $[0, \infty)$ absolut integrierbar \implies

$$U(s) = \int_0^{\infty} u(t) \exp(-st) dt, \quad \operatorname{Re} s \geq a$$

$\mathcal{L} : u \mapsto U$ linear und injektiv

- $\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v, \quad \mathcal{L}(\lambda u) = \lambda \mathcal{L}u$
- $\mathcal{L}u = 0 \implies u = 0$

Inverse Laplace-Transformation

$u(t) \exp(-at)$ auf $[0, \infty)$ absolut integrierbar \implies

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} U(s) \exp(st) ds, \quad b \geq a$$

Laplace-Transformation von Exponentialfunktionen

$$u(t) = t^n \exp(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$$

$a = \lambda + i\omega \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \exp(\lambda t) \cos(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}, \\ \exp(\lambda t) \sin(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Verschiebung und Skalierung bei Laplace-Transformation

$$u(t - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad \exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s - a)$$

mit $\varphi(\cdot - a)$ der um a nach rechts verschobenen Funktion

Skalierung \rightsquigarrow

$$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1}U(s/a)$$

Laplace-Transformation periodischer Funktionen

$u(t) = u(t + T)$ (T -periodisch) \rightsquigarrow

$$U(s) = \frac{\int_0^T \exp(-st)u(t) dt}{1 - \exp(-Ts)}$$

Differentiation und Laplace-Transformation

$$u'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sU(s) - u(0),$$

$$tu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -U'(s)$$

höhere Ableitungen

$$u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$$

$$t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)$$

Stammfunktion

$$v(t) = \int_0^t u(r) dr \quad \Longrightarrow \quad V(s) = U(s)/s$$

Faltung bei Laplace-Transformation

$$(v \star u)(t) = \int_0^t v(t-r)u(r) dr \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(v \star u) = (\mathcal{L}u)(\mathcal{L}v)$$

Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Anfangswertproblem

$$u' + pu = f(t), \quad u(0) = a$$

Laplace-Transformation \rightsquigarrow

$$U(s) = \frac{1}{s+p}(F(s) + a)$$

Lösung durch Faltung mit der inversen Transformation $\varphi(t) = \exp(-pt)$ von $(s+p)^{-1}$,

$$u = \underbrace{a\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$

Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Anfangswertproblem

$$u'' + pu' + qu = f(t), \quad u(0) = a, \quad u'(0) = b$$

Laplace-Transformation \rightsquigarrow

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + ps + q}(F(s) + as + ap + b)$$

Lösung durch Faltung,

$$u = \underbrace{a\varphi' + (ap + b)\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$

λ, ϱ : Nullstellen des charakteristischen Polynoms $s^2 + ps + q \implies$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda t} - e^{\varrho t}}{\lambda - \varrho}, & \lambda \neq \varrho \\ te^{\lambda t}, & \lambda = \varrho \end{cases}$$

Teil 10

Fourier-Analysis

10.1 Fourier-Reihen

Periodische, quadratintegrierbare Funktionen

$L^2_{2\pi}$: 2π -periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

mit induzierter Norm $\|\cdot\|_{2\pi}$

$f \in L^2_{2\pi}$ durch glatte Funktionen approximierbar

Orthogonalität von Kosinus und Sinus

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx) \sin(\ell x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx) \sin(kx) dx = 0$$

für $j \neq k$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx = \pi$$

für $k > 0$

\implies

$$1, \quad \cos(kx), \quad \sin(kx), \quad k > 0$$

Orthogonalsystem in $L^2_{2\pi}$

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \geq 0,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1$$

Fourier-Reihen von geraden und ungeraden Funktionen

f gerade \rightsquigarrow Kosinus-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx), \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \geq 0$$

f ungerade \rightsquigarrow Sinus-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1$$

Fourier-Basis

Orthonormalbasis $e_k(x) = e^{ikx}$ von $L^2_{2\pi}$

$$\langle e_j, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j(x) \overline{e_k(x)} dx = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k(x), \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{e_k(t)} dt$$

Zusammenhang komplexer und reeller Fourier-Reihen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \sim f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Umrechnungsformeln

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k})$$

bzw.

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

f reell $\Leftrightarrow c_{-k} = \overline{c_k}$

Differentiation und Integration von Fourier-Reihen

$$\frac{d}{dx} \sum_k d_k e_k(x) = \sum_{k \neq 0} c_k e_k(x), \quad c_k = (ik)d_k$$

mit $e_k(x) = e^{ikx}$

$$\int \sum_{k \neq 0} c_k e_k(x) dx = d_0 + \sum_{k \neq 0} d_k e_k(x), \quad d_k = (ik)^{-1} c_k, \quad d_0 \in \mathbb{R}$$

$c_0 \neq 0 \implies$ keine periodische Stammfunktion

Skalierung von Fourier-Reihen

f h -periodisch \rightsquigarrow lineare Transformation auf $[-\pi, \pi]$

alternativ: direkte Berechnung der Fourier-Koeffizienten

komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k x / h}, \quad c_k = \frac{1}{h} \int_0^h f(t) e^{-2\pi i k t / h} dt$$

reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k x / h) + b_k \sin(2\pi k x / h)$$

mit

$$a_k = \frac{2}{h} \int_0^h f(t) \cos(2\pi k t / h) dt, \quad k \geq 0,$$

$$b_k = \frac{2}{h} \int_0^h f(t) \sin(2\pi k t / h) dt, \quad k \geq 1$$

10.2 Konvergenz

Fourier-Projektion

$$p_n f = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k, \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

beste Approximation zu f in der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2\pi}$ induzierten Norm $\| \cdot \|_{2\pi}$, d.h.

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} = \min_{q_n = \sum_{|k| \leq n} d_k e_k} \|f - q_n\|_{2\pi}$$

und $\|p_n f\|_{2\pi} \leq \|f\|_{2\pi}$

Dirichlet-Kern

Integraldarstellung der Fourier-Projektion $p_n f = \sum_{|k| \leq n} \langle f, e_k \rangle_{2\pi} e_k$, $e_k(x) = e^{ikx}$

$$(p_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q_n(x-t) f(t) dt, \quad q_n(\xi) = \frac{\sin((n+1/2)\xi)}{\sin(\xi/2)}$$

Konvergenz im Mittel bei Fourier-Reihen

Konvergenz der Fourier-Projektionen

$$p_n f = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k, \quad e_k(x) = e^{ikx}, \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

in der Norm $\| \cdot \|_{2\pi}$, d.h.

$$\|f - p_n f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (p_n f)(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Parseval-Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2, \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

Konvergenzrate der Fourier-Projektion

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \leq (n+1)^{-k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

Ungleichung für $f(x) = e^{i(n+1)x}$ bestmöglich

10.3 Diskrete Fourier-Transformation

Fourier-Matrix

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0 \cdot 0} & \dots & w_n^{0 \cdot (n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1) \cdot 0} & \dots & w_n^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi i/n)$$

unitär nach Normierung: $W_n^{-1} = W_n^*/n$

Diskrete Fourier-Transformation

$$f = W_n c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{n} W_n^* f$$

d.h.

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk} \quad \Leftrightarrow \quad c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j w_n^{-kj}$$

mit $w_n = \exp(2\pi i/n)$

Transformation $c \mapsto f$ entspricht Auswertung des trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}$$

an den Punkten $x_j = 2\pi j/n$, d.h. $f_j = p(x_j)$

inverse Transformation $f \mapsto c$ entspricht Riemann-Summe für die Fourier-Koeffizienten, d.h.

$$\langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) e^{-ikx_j}$$

mit $x_j = 2\pi j/n$

Schnelle Fourier-Transformation

Berechnung der diskreten Fourier-Transformation,

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk}, \quad w_n = \exp(2\pi i/n),$$

für $n = 2^\ell$

$f = \text{FFT}(c)$

$n = \text{length}(c)$

if $n = 1$, $f = c$, **return**

else

```

g = FFT(c0, c2, ..., cn-2), h = FFT(c1, c3, ..., cn-1)
p = (1, wn, wn^2, ..., wn^(n/2-1))
f = (g + p.* h, g - p.* h)
end

```

Operationenzahl: $2n\ell$

Trigonometrische Interpolation

Berechnung des trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = c_m \cos(mx) + \sum_{|k| < m} c_k e^{ikx}, \quad 2m = n = 2^\ell,$$

das die Daten

$$f_j = f(x_j), \quad x_j = 2\pi j/n, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

interpoliert, mit der inversen schnellen Fourier-Transformation:

$$(c_0, \dots, c_m, c_{-m+1}, \dots, c_{-1}) = \text{IFFT}(f)$$

Zyklische Gleichungssysteme

zyklische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_n^{-kj}, \quad w_n = \exp(2\pi i/n)$$

Diagonalisierung durch die Fourier-Matrix

$$\frac{1}{n} W_n^* A W_n = \text{diag}(\lambda), \quad \lambda = W_n^* a$$

↪ Lösung zyklischer Gleichungssysteme $Ax = b$ mit diskreter Fourier-Transformation

$$x = W_n \text{diag}(\lambda)^{-1} (W_n^* b/n)$$

10.4 Fourier-Transformation

Fourier-Transformation

$$\hat{f}(y) = (\mathcal{F}f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx} dx$$

inverse Fourier-Transformation \mathcal{F}^{-1}

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{iyx} dy$$

Differentiation bei Fourier-Transformation

$$f'(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} iy\hat{f}(y), \quad xf(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\hat{f}'(y)$$

Verschiebung bei Fourier-Transformation

$$f(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-ia y)\hat{f}(y), \quad \exp(iax)f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y-a)$$

Skalierung bei Fourier-Transformation

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y/a)/|a|, \quad a \neq 0$$

Faltung und Fourier-Transformation

$$\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}, \quad (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt$$

Regeln für die Fourier-Transformation

$\varphi(x)$	$\hat{\varphi}(y)$
$af(x) + bg(x)$	$a\hat{f}(y) + b\hat{g}(y)$
$\hat{f}(-x)$	$2\pi f(y)$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\hat{f}(-y)}$
$f(ax)$	$\hat{f}(y/a)/ a , \quad a \neq 0$
$f(x - a)$	$\exp(-ia y)\hat{f}(y)$
$\exp(iax)f(x)$	$\hat{f}(y - a)$
$f'(x)$	$iy\hat{f}(y)$
$xf(x)$	$i\hat{f}'(y)$
$(f \star g)(x)$	$\hat{f}(y)\hat{g}(y)$

Quadratintegrierbare Funktionen

$L^2(D)$: Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int_D |f(x)|^2 dx < \infty$$

Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_D f(x)\overline{g(x)} dx$$

mit der induzierten Norm $\|\cdot\|_2$

$f \in L^2(D)$ durch glatte Funktionen approximierbar

Satz von Plancherel

$$2\pi\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad \sqrt{2\pi}\|f\| = \|\hat{f}\|$$

\rightsquigarrow Definition der Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ durch Approximation mit glatten Funktionen)

Rekonstruktionssatz

$$\hat{f}(y) = 0, |y| > h \quad \implies \quad f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\pi/h) \operatorname{sinc}(hx - j\pi)$$

mit $\operatorname{sinc}(t) = \sin t/t$

Poisson-Summationsformel

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi\ell)$$

für stetige und quadratintegrierbare Funktionen f und \hat{f}

Teil 11

Komplexe Analysis

11.1 Komplexe Funktionen

Gebiet

zusammenhängende offene Teilmenge D des \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n

Rand ∂D genügend glatt; i.a. lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion darstellbar

Komplexe Funktion

$$\mathbb{C} \supseteq D \ni z \mapsto w = f(z) \in \mathbb{C}$$

reelle Darstellung

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

Möbius-Transformation

$$f : z \mapsto w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

Umkehrabbildung

$$w \mapsto z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Invarianz von Kreisen (gegebenenfalls als Geraden entartet)

eindeutig durch Bilder w_j von drei Punkten z_j bestimmt und mit Hilfe des Doppelverhältnisses darstellbar

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy$$

2π -periodisch bzgl. y

Streifen $\text{Im } z \in [s, s + 2\pi)$ \rightarrow gelochte Gauß-Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

horizontale Geraden $z = t + iy, t \in \mathbb{R}$ \rightarrow Halbgeraden $w = se^{iy}, s \in \mathbb{R}^+$

vertikale Geraden $z = x + it, t \in \mathbb{R}$ \rightarrow Kreise $|w| = e^x$

Komplexer Logarithmus

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $z = \exp(w)$

Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg(z) \rightsquigarrow$

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln(r) + i(\varphi + 2\pi k) \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$

Standardbereich (Hauptzweig)

$$\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

singularitätenfreie Definition der Logarithmusfunktion nur auf Gebieten, die weder 0 noch eine geschlossene Kurve um 0 enthalten, möglich

Potenzen einer komplexen Zahl

ganzzahlige Exponenten $m \in \mathbb{Z}$

$$z^m = r^m e^{im\varphi}, \quad z = re^{i\varphi}$$

rationale Exponenten $p/q \in \mathbb{Q}$

$$z^{p/q} = r^{p/q} \exp(ip\varphi/q) w_q^{kp}, \quad k = 0, \dots, q-1$$

mit $w_q^k = \exp(2\pi i k/q)$ den q -ten Einheitswurzeln

11.2 Komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Komplexe Differenzierbarkeit

$$f'(z) = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Grenzwert unabhängig von der Folge Δz

komplex differenzierbar oder analytisch in einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C} \Leftrightarrow$

$f'(z)$ existiert für alle $z \in D$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

komplex differenzierbar $\Leftrightarrow f(x, y) = (u, v)^t$ total differenzierbar und

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

äquivalente Ausdrücke für die Ableitung

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

sowohl u als auch v harmonisch, d.h.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 = \Delta v$$

Konjugiert harmonische Funktion

$\Delta u = 0 \implies \exists$ komplex differenzierbare Funktion (komplexes Potential)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy$$

$v = \text{Im } f$: konjugiert harmonische Funktion

Konforme Abbildung

f komplex differenzierbar und injektiv \rightsquigarrow

isotrope und winkeltreue Abbildung $z \mapsto w = f(z)$

Kettenregel \implies

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$$

für die Tangenten an Kurven $z(t)$ und $w(t) = f(z(t))$

Streckung um den Faktor $|f'(z_0)|$ und Drehung um den Winkel $\arg(f'(z_0))$

Invarianz von Schnittwinkeln

Elementare konforme Abbildungen

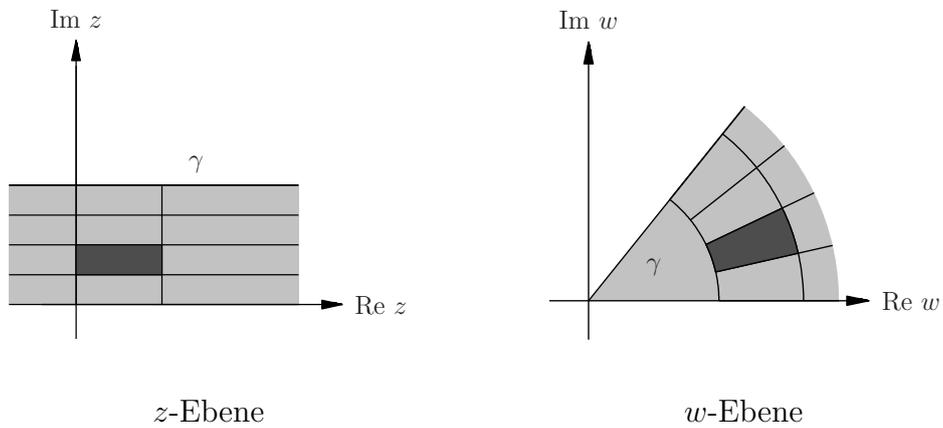
$w = e^z$ bildet den Streifen

$$z : 0 < \operatorname{Im} z < \gamma$$

mit $\gamma \leq 2\pi$ auf den Sektor

$$w : 0 < \arg w < \gamma$$

ab



$z = \operatorname{Ln} w$ bildet Sektoren auf Streifen ab

Hauptsatz über konforme Abbildungen

Existenz konformer Abbildungen f auf die Einheitskreisscheibe für jedes einfach zusammenhängende, echte Teilgebiet der komplexen Ebene

Bedingungen

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0$$

legen f eindeutig fest

11.3 Komplexe Integration

Integral einer komplexen Funktion

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt, \quad f(t) = u(t) + iv(t)$$

\int ... linear und additiv und durch

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

abschätzbar

Komplexes Kurvenintegral

$$\int_C f dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt, \quad C : t \mapsto z(t)$$

bei gleichbleibender Orientierung unabhängig von der Parametrisierung

bei Umkehrung der Durchlaufrichtung Änderung des Vorzeichens

Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals

linear bezüglich des Integranden

$$\int_C rf + sg dz = r \int_C f dz + s \int_C g dz$$

additiv bezüglich des Integrationsweges

$$\int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{C_2} f dz, \quad C = C_1 + C_2$$

insbesondere: $\int_C f dz = - \int_{-C} f dz$ mit $-C$ dem in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weg C

Stammfunktion

$$\int_C f' dz = f(z_1) - f(z_0)$$

für einen von z_0 nach z_1 verlaufenden Weg C

\rightsquigarrow Wegunabhängigkeit und Verschwinden des Kurvenintegrals für geschlossene Wege

Singularitäten einer komplexen Funktion

- schwache Singularität:

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$$

(aufgrund der Cauchyschen Integralformel immer hebbar)

- Pol n -ter Ordnung:

$$|(z - a)^n f(z)| = O(1), \quad z \rightarrow a,$$

$n > 0$ minimal

- wesentliche Singularität:

$$(z - a)^n f(z) \neq O(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Homotopie von Kurven

Abbildung

$$[0, 1]^2 \ni (s, t) \mapsto z(s, t) \in D,$$

die die Kurven $t \mapsto z(k, t)$, $k = 0, 1$, in einem Gebiet D stetig ineinander überführt

$z(1, t) = p$: Homotopie zu einem Punkt p

Cauchys Theorem

$$\int_C f dz = 0$$

f : bis auf endlich viele schwache Singularitäten im Gebiet D analytisch

C : geschlossen, in D zu einem Punkt homotop

Umlaufzahl

$$n(C, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - a}$$

für einen geschlossenen Weg C

Cauchysche Integralformel

$$n(C, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in D$$

f : analytisch in D

C : geschlossen, in D zu einem Punkt homotop

$n(C, z) = 1$ für einen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um z

Integralformel für Ableitungen einer komplexen Funktion

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

f : analytisch in D

C : geschlossen mit $n(C, z) = 1$, in D zu einem Punkt homotop

11.4 Eigenschaften analytischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

für eine auf einer Kreisscheibe mit Radius $> r$ um z analytische Funktion f

Identität gültig ebenfalls für Real- und Imaginärteil sowie für harmonische Funktionen

Maximumprinzip

f analytisch in D , stetig auf $\overline{D} \implies$

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

Abschätzungen für komplexe Ableitungen

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|w-z|=r} |f(w)|$$

für eine auf einer Kreisscheibe mit Radius $> r$ um z analytische Funktion f

Satz von Liouville

f analytisch und beschränkt auf $\mathbb{C} \implies f$ konstant

Fundamentalsatz der Algebra

Existenz einer Nullstelle in \mathbb{C} für jedes nicht konstante Polynom p

\rightsquigarrow Faktorisierung

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n), \quad n = \text{Grad } p$$

11.5 Residuenkalkül

Residuum

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

für eine in einer punktierten Kreisscheibe $D \setminus \{a\}$ analytische Funktion f und jeden geschlossenen Weg $C \subset D \setminus \{a\}$ mit $n(C, a) = 1$

(z. B. einem entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis)

$\operatorname{Res}_a f = c_{-1}$ für

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + g(z), \quad |g(z)| = O(1) \text{ für } z \rightarrow a$$

(Polstelle) oder für

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

(Laurent-Entwicklung in der Umgebung einer wesentlichen Singularität)

Berechnung von Residuen

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$$

für eine einfache Polstelle bei a

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z-a)^n f(z)) \right]$$

für eine Polstelle n -ter Ordnung bei a

Residuensatz

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{a_j} f$$

C : entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D

f : in \overline{D} stetig und in D bis auf endlich viele Singularitäten a_j analytisch

Trigonometrische Integranden

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t) dt, \quad r : \text{rationale Funktion}$$

Substitution

$$z = e^{it}, \quad \cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dz = iz dt$$

↔

$$\int_C f(z) dz, \quad f(z) = r \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{1}{iz}, \quad C : |z| = 1$$

Residuensatz \implies

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{|a|<1} \operatorname{Res}_a f$$

Rationale Integranden

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a f$$

f : rationale Funktion ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad um mindestens 2 kleiner als der Nennergrad

alternativ: $= -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a < 0} \operatorname{Res}_a f$

Transzendente Integranden

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\substack{\operatorname{Im} a > 0 \\ z=a}} \operatorname{Res} (f(z) e^{i\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

für eine rationale Funktion f ohne reelle Polstellen und mit Zählergrad kleiner als der Nennergrad

Summation der Residuen in der unteren Halbebene für $\lambda < 0$

11.6 Potenzreihen

Komplexes Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (z-a)^j$$

Integraldarstellung des Restglieds

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+1}$$

mit C einem geschlossenen Weg mit $n(C, a) = 1$

(z. B. ein entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a)

\rightsquigarrow Approximation mit Ordnung $n+1$: $|f(z) - p_n(z)| = O(|z-a|^{n+1})$, $z \rightarrow a$

Komplexe Taylor-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

absolute Konvergenz für

$$|z-a| < r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f^{(n)}(a)/n!|^{1/n} \right)^{-1}$$

Konvergenzradius r : Abstand des Entwicklungspunktes a zur nächsten Singularität von f , d.h. zum Rand des Analytizitätsgebietes

Methoden der Taylor-Entwicklung

- direkte Berechnung der Ableitungen im Entwicklungspunkt
- gliedweise Differentiation oder Integration
- Koeffizientenvergleich
- Produktbildung durch gliedweise Multiplikation
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument

Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

für eine in einem Kreisring $D : r_1 < |z-a| < r_2$ analytische Funktion

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

mit $C \subset D$ einem beliebigen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis um a

Methoden der Laurent-Entwicklung

- direkte Berechnung der Koeffizienten
- gliedweise Differentiation oder Integration bekannter Reihen
- Koeffizientenvergleich
- Summe oder Produkte bekannter Reihen
- Substitution $z \rightarrow \frac{1}{z-a}$ in bekannten Taylor-Reihen
- Hintereinanderschaltung von Funktionen durch Einsetzen einer Reihe als Argument

11.7 Differentialgleichungen

Regulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von $a \implies$

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

regulär bei $z = a$

regulär bei $z = a \implies$ eindeutige, in einer Umgebung von a analytische Lösung zu beliebigen Anfangswerten $u(a) = u_0, u'(a) = u_1$

Konstruktion durch Koeffizientenvergleich

Singulärer Punkt einer komplexen Differentialgleichung

q/r Pol höchstens erster und p/r Pol höchstens zweiter Ordnung bei $z = a \implies$

$z = a$ regulärer singulärer Punkt der Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

charakteristische Gleichung

$$\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$$

mit

$$\frac{q(z)}{r(z)} = \frac{q_0 + q_1(z-a) + \dots}{z-a}, \quad \frac{p(z)}{r(z)} = \frac{p_0 + p_1(z-a) + \dots}{(z-a)^2}$$

Differenz der Nullstellen α, β von φ nicht ganzzahlig \implies

\exists zwei linear unabhängige Lösungen

$$(z-a)^\alpha v(z), \quad (z-a)^\beta w(z)$$

mit v und w in einer Umgebung von a analytisch und $v(a), w(a) \neq 0$

$\alpha - \beta \in \mathbb{Z} \implies$ i.a. nur eine Lösung obigen Typs zu dem Exponenten α mit dem größten Realteil

zweite Lösung durch Variation der Konstanten, d.h. mit dem Ansatz

$$u(z) = c(z)(z-a)^\alpha v(z)$$

Bessel-Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0$$

für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ zwei linear unabhängige Lösungen

$$J_{\pm\alpha}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

für $\alpha \in \mathbb{Z}$ nur eine Lösung obigen Typs für den positiven Index
spezielle Bessel-Funktionen

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

und

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}, \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}}$$

Hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0$$

reguläre Singularitäten bei $z = 0, 1, \infty$

analytische Lösung für $-c \notin \mathbb{N}_0$

$$u(z) = F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n$$

mit $(t)_0 = 1$ und $(t)_n = t(t+1) \cdots (t+n-1)$ für $n \geq 1$