Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

Ist g eine Majorante für f, d.h. gilt

$$|f(x)| \leq |g(x)| \qquad a < x < b$$

so folgt aus der absoluten Integrierbarkeit von g die absolute Integrierbarkeit von f über dem Intervall $[a, b]$ und damit die Existenz des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis

betrachte o.B.d.A. eine Singularität an der oberen Grenze:
$\int_a^b f = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f$

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

monoton wachsend, beschränkt durch $\int_a^b |g|$
$\implies$ Konvergenz für $c \to b^-$ und Existenz von $\int_a^b |f|$

$$s(c) = \int_a^c (\underbrace{f + |f|}_{\geq 0})$$

ebenfalls monoton wachsend, beschränkt durch $2\int_a^b |g|$
$\implies$ Existenz von $\int_a^b (f + |f|)$
Subtraktion $\implies$ Existenz von

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f|$$

Beispiel

Vergleichsfunktion $f(x) = x^r$

$$\int_a^b x^r \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b) - \ln(a), & r = -1 \end{cases}, \quad 0 < a < b < \infty$$

(i) $b \to \infty$:
Konvergenz für $r < -1$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Existenz von

$$\int_1^\infty x^r \,\mathrm{d}x, \quad r < -1, \quad \text{Grenzwert}: \ -\frac{1}{r+1}$$

(ii) $a \to 0^+$:
Konvergenz für $r > -1$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Existenz von

$$\int_0^1 x^r \,\mathrm{d}x, \quad r > -1, \quad \text{Grenzwert}: \ \frac{1}{r+1}$$

Beispiel

Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty (\sin x)/x \, \mathrm{d}x$

Aufspaltung in zwei Anteile: $\int_0^\infty \ldots = \int_0^1 \ldots + \int_1^\infty \ldots$
Existenz des Integrals über $[0,1]$ wegen Stetigkeit des Integranden
Umformung des Integrals über $[1,\infty]$ mit partieller Integration

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

erster Term $\to \cos(1)$ für $b \to \infty$
zweiter Term: Integrand majorisiert durch

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|$$

$\Longrightarrow$ Konvergenz nach dem Vergleichskriterium

Methoden der Fourier-Analysis $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$