Variablensubstitution

Aus der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

folgt für eine Substitution $y = g(x)$ durch Bilden von Stammfunktionen

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(y) + c = \int f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Entsprechend gilt für bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mit Hilfe von Differentialen lässt sich diese Identität in der suggestiven Form

$$\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{y})\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

schreiben.

Beispiel

Variablensubstitution bei erkennbarer innerer Ableitung

(i) Unbestimmtes Integral:
z.B.

$$\int (\ln x)^2\,(1/x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $f(y) = y^2$, $y = g(x) = \ln x$, $g'(x) = 1/x$
Substitutionsregel $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y \quad \rightsquigarrow$

$$\int y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}y^3 + c$$

Rücksubstitution $y = g(x) = \ln x \quad \rightsquigarrow$

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c$$

(ii) Bestimmtes Integral:
z.B.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, \cos x \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, \mathrm{d}x$$

mit $f(y) = \sqrt{y}$, $y = g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$
Bilder von $a = 0$, $b = \pi/2$ unter der Abbildung $x \mapsto y$:

$$g(a) = \sin(0) = 0, \quad g(b) = \sin(\pi/2) = 1$$

$\leadsto$ transformiertes Integral

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{y}\, \mathrm{d}y = \left[\frac{2}{3}\, y^{3/2}\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Beispiel

Stammfunktion $F(y)$ von $(\mathrm{e}^y - 1)^{-1}$ für $y > 0$ (Pol bei $y = 0$)

Substituiere $y = g(x) = \ln x \iff x = \mathrm{e}^y$ im unbestimmten Integral

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{\mathrm{e}^y - 1}\,\mathrm{d}y$$

Transformationsregel, $\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow$

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(g(x))\,\underbrace{g'(x)}_{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)x}\,\mathrm{d}x$$

Partialbruchzerlegung $\frac{1}{(x-1)x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \quad \rightsquigarrow$

$$-\ln|x| + \ln|x-1| + c = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c = \ln|1 - 1/x| + c$$

Rücksubstitution von $x = \mathrm{e}^y \quad \rightsquigarrow \quad$ Stammfunktion

$$F(y) = \ln|1 - 1/\mathrm{e}^y| = \ln|1 - \mathrm{e}^{-y}|$$

Beispiel

Lineare Variablensubstitution

$$y = px + q$$

(i) Unbestimmtes Integral $\int \underbrace{(2x-3)^4}_{f(x)} \,\mathrm{d}x$:

$y = 2x - 3,\ \mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x \quad \rightsquigarrow$

$$\int (2x-3)^4 \,(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y = \int y^4\,(1/2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{5\cdot 2}\,y^5 + c$$

Rücksubstitution $\quad\rightsquigarrow\quad$ Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{10}\,y^5\Big|_{y=2x-3} = \frac{(2x-3)^5}{10}$$

(ii) Bestimmtes Integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(3-4x)^2}\,\mathrm{d}x$:
Umrechung der Differentiale

$$y = 3 - 4x, \quad \mathrm{d}y = -4\,\mathrm{d}x$$

und Transformation der Grenzen

$$x = -1 \mapsto y = 3 - 4 \cdot (-1) = 7, \quad x = 0 \mapsto y = 3 - 4 \cdot 0 = 3$$

$\leadsto$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{1}{(3-4x)^2}\,(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y &= \int_{7}^{3} (1/y^2)\,(-1/4)\,\mathrm{d}y \\
&= \left[(-1/y)\,(-1/4)\right]_{y=7}^{y=3} \\
&= \frac{1}{4\cdot 3} - \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{1}{21}
\end{aligned}$$

Beispiel

Unbestimmtes und bestimmtes Integral von $f(x) = 1/\sqrt{x^2 - 6x + 5}$

Umformung durch quadratische Ergänzung

$$x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4 = 4\left(((x-3)/2)^2 - 1\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{((x-3)/2)^2 - 1}}$$

(i) Unbestimmtes Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$:
Substitution $y = (x-3)/2$, $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y \quad \rightsquigarrow$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Substitution $y = \cosh t$, $\mathrm{d}y = \sinh t \,\mathrm{d}t$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}} &= \int \frac{\sinh t \,\mathrm{d}t}{\sinh t} = \int \mathrm{d}t = t + c \\
&= \operatorname{arcosh} y + c = \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\
&= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c
\end{aligned}$$

(benutzt: $\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$, Formel für die Umkehrfunktion von cosh)

(ii) Beispiel eines bestimmten Integrals:

$$\begin{aligned}
\int_5^7 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \left[\ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right)\right]_5^7 \\
&= \ln(4/2 + \sqrt{12}/2) - \ln(2/2 + \sqrt{0}/2) \\
&= \ln(2+\sqrt{3}) - \ln 1 = \ln(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Verschiedene Berechnungsmethoden für $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(i) Geometrisches Argument:
$f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$ für $0 \leq x \leq 1$
$\implies \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x$: Inhalt der Fläche A (Viertelkreis) unter dem Funktionsgraph
$\implies \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \pi/4$

(ii) Substitution $x = \sin u$:
$\mathrm{d}x = \cos u\,\mathrm{d}u$ und $x = 0 \mapsto u = 0$, $x = 1 \mapsto u = \frac{\pi}{2} \quad \implies$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cos u} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

(iii) Substitution $x = \cos u$:
$\mathrm{d}x = -\sin u \,\mathrm{d}u$ und $x = 0 \mapsto u = -\pi/2$, $x = 1 \mapsto u = 2\pi$
(ebenfalls möglich $u = 0$ bzw. $u = 2k\pi$; Eindeutigkeit des Urbildes der Transformationsabbildung nicht erforderlich - gleiche Resultate)
$\Longrightarrow$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-\cos^2 u}\,(-\sin u)\,\mathrm{d}u \underset{(*)}{=} \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\,\mathrm{d}u = -\frac{5\pi}{4}$$

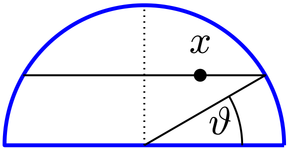
(*) falsche Berechnung der Wurzel
richtig: $\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u| \quad \rightsquigarrow \quad$ korrektes Ergebnis

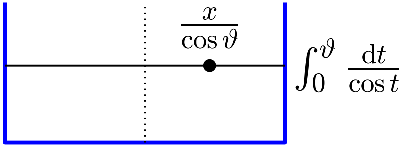
$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\pi/2}^{0} -\sin^2 u\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\,\mathrm{d}u - \cdots \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Beispiel

Mercator-Projektion:
winkeltreue Abbildung der Erdoberfläche auf eine Ebene

$$(x, \sin\vartheta) \mapsto \left(\frac{x}{\cos\vartheta}, \int_0^\vartheta \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}\right)$$





Streckung der Breitenkreise mit dem Faktor $1/\cos\vartheta$

Bestimmung einer Stammfunktion F für $f(t) = 1/\cos t$
Substitution

$$u = \frac{1}{\cos t} + \tan t = \frac{1+\sin t}{\cos t}, \qquad \mathrm{d}u = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t &= \int (\cos t)^{-1} \underbrace{\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}\right)^{-1}\,\mathrm{d}u}_{\mathrm{d}t} \\
&= \int \left(\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos t}\right)^{-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c \\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \tan t\right| + c
\end{aligned}$$