Uneigentliche Integrale

Für eine auf $[a, b)$ stückweise stetige Funktion f wird durch

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f$$

der Integralbegriff auf unendliche Intervalle ($b = \infty$) und unbeschränkte Integranden ($f(b) = \pm\infty$) erweitert.

Analog wird eine Singularität an der unteren oder an beiden Grenzen behandelt. Im letzteren Fall muss der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Folgen $c \to a^+$, $d \to b^-$ sein.

Hinreichend für die Existenz eines uneigentlichen Integrals ist die absolute Intergrierbarkeit von f, d. h.

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{const}$$

für alle Teilintervalle $[c, d] \subset (a, b)$.

Beispiel

Berechnung des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{x=0}^{x=b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-b}+1\right) = 1$$

direkte Verwendung uneigentlicher Grenzen bei elementaren Grenzwerten:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_{x=0}^{x=\infty} = 0-(-1) = 1$$

Beispiel

Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^r}\,\mathrm{d}x, \quad r \in \mathbb{R}\backslash 0$$

Substitution $y = \ln x$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/x$, $\quad x = 2 \mapsto y = \ln 2$, $x = \infty \mapsto y = \infty$ $\rightsquigarrow$

$$\int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{y^r}\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \left[\dfrac{(\ln y)^{1-r}}{1-r}\right]_{y=\ln 2}^{y=\ln b} = \dfrac{(\ln b)^{1-r} - (\ln 2)^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ [\ln y]_{y=\ln 2}^{y=\ln b} = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\,, & r = 1 \end{cases}$$

Grenzwert für $b \to \infty$ existiert genau dann wenn $r > 1$:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^r}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln 2)^{1-r}}{r-1}$$

Beispiel

Berechnung des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$$

Singularität bei $x = \pi/2 \quad \rightsquigarrow \quad$ betrachte obere Grenze $b < \pi/2$
Substitution $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$, $x = 0 \mapsto y = 1$,
$x = b \mapsto y = \cos b \quad \rightsquigarrow$

$$\int_1^{\cos b} y^{-1/2}\,(-\mathrm{d}y) = \left[-2y^{1/2}\right]_{y=1}^{y=\cos b} = -2\sqrt{\cos b} + 2$$

Grenzwert

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\pi/2} \int_0^b \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\pi/2} \left(-2\sqrt{\cos b} + 2\right) = 2$$

Beispiel

Analyse des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Stammfunktion des Integranden: $\arctan(x) + \ln(1+x^2)$

(i) Falsche Berechnung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{x=-b}^{x=b} \\
&= \lim_{b\to\infty} (2\arctan(b)) = \pi
\end{aligned}$$

$(\arctan(-b) = -\arctan(b),\ \ln(1+b^2) = \ln(1+(-b)^2))$

(ii) Korrekte Argumentation:
unabhängige Betrachtung der unteren und oberen Grenze

$$\begin{aligned}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\arctan x + \ln(1+x^2)\right]_{x=c}^{x=0} \\ &= (\arctan 0 + \ln 1) - (\arctan c + \ln(1+c^2)) \\ &= -\arctan(c) - \ln(1+c^2)\end{aligned}$$

$$\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(d) + \ln(1+d^2)$$

$c \to -\infty$, $d \to \infty$

$\Longrightarrow$ keine endlichen Grenzwerte in beiden Fällen

$\Longrightarrow$ Divergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$