Trigonometrische Substitutionen

Mit Hilfe der folgenden Substitutionen lassen sich eine Reihe von elementaren algebraischen Integranden explizit berechnen:

$$
\begin{array}{lll}
x = a\sin t: & \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \\
x = a\tan t: & \mathrm{d}x = a/\cos^2 t\,\mathrm{d}t & \sqrt{a^2 + x^2} = a/\cos t \\
x = a/\cos t: & \mathrm{d}x = a\sin t/\cos^2 t\,\mathrm{d}t & \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t
\end{array}
$$

Gegebenenfalls müssen die Argumente der Wurzel zunächst durch quadratische Ergänzung auf Standardform gebracht werden.

Beispiel

Alternative Berechnungsmethoden für $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(i) Trigonometrische Substitution:

$$x = \sin t,\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad x = 0 \to t = 0,\ x = 1/2 \to t = \pi/6$$

$\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, $\cos^2 t = (1+\cos(2t))/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \Big[\underbrace{\frac{1}{2}(t+\sin(2t)/2)}_{G(t)}\Big]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Rücktransformation von $G(t)$, $\sin(2t)/2 = \sin t\cos t = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$

$\rightsquigarrow$ Stammfunktion

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c$$

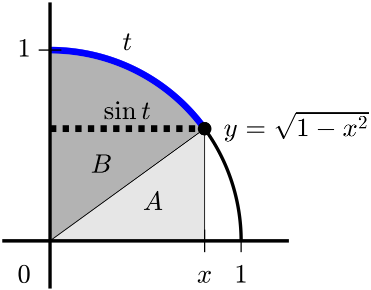
(ii) Geometrisches Argument:
Fläche unter dem Graph von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$: Summe der Teilflächen A und B

- Dreieck

$$\text{area}\, A = x\sqrt{1-x^2}/2$$

- Kreissektor mit
Öffnungswinkel t ($x = \sin t$)

$$\text{area}\, B = t/2 = \frac{1}{2}\arcsin x$$



$\rightsquigarrow$ gleiche Stammfunktion $F(x) = \text{area}\, A + \text{area}\, B$

Beispiel

Integration von $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$

(i) Unbestimmtes Integral $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$:

trigonometrische Substitution $x = \tan t$, $\mathrm{d}x = 1/\cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}t/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c$$

benutzt: $\sqrt{1+x^2} = 1/\cos t$, (*) Formel für die Stammfunktion von $1/\sin$

Rücksubstitution $\quad\Longrightarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan((\arctan x)/2)| + c$$

(*) Verifikation durch Differentiation:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln|y| = 1/y$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan z = 1/\cos^2 z \quad\Longrightarrow$

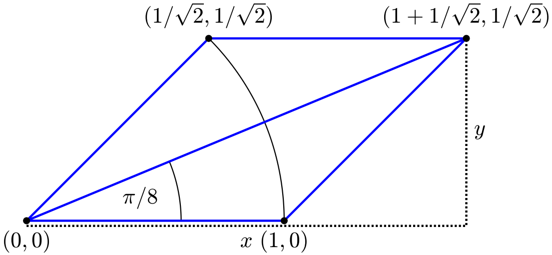
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|\tan(t/2)| = \frac{1}{\tan(t/2)}\frac{1/2}{\cos^2(t/2)} = \frac{1}{2\sin(t/2)\cos(t/2)} = \frac{1}{\sin t} \quad \checkmark$$

(ii) Bestimmtes Integral $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$:

Verwendung der berechneten Stammfunktion $\quad\rightsquigarrow$

$$\left[\ln|\tan((\arctan x)/2)|\right]_{x=1}^{x=\sqrt{3}} = \ln|\tan(\pi/6)| - \ln|\tan(\pi/8)|$$
$$= \ln|1/\sqrt{3}| - \ln|1/(1+\sqrt{2})| = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

Berechnung von $\tan(\pi/8)$ mit Hilfe der Diagonale einer Raute mit spitzem Winkel $\pi/4$



$$\Longrightarrow \qquad \tan(\pi/8) = y/x = (1/\sqrt{2})/(1/\sqrt{2}+1) = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Beispiel

Stammfunktion von $f(x)=\sqrt{x^2-1}/x^3$, $x\geq 1$

(i) Trigonometrische Substitution $x=1/\cos t$, $0\leq t<\pi/2$:

$$t=\arccos(1/x),\quad \mathrm{d}x=\sin t/\cos^2 t\,\mathrm{d}t,\quad \sqrt{x^2-1}=\tan t$$

Einsetzen in das Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int x^{-3}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\int \cos^3 t\ \tan t\,\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

Stammfunktion von $\sin^2 t$: $(t-\cos t\sin t)/2$ (Überprüfung durch Differenzieren) $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} F(x) &= (t-\cos t\ \underbrace{\sin t}_{\sqrt{1-\cos^2 t}})/2=\Big(\arccos(1/x)-(1/x)\sqrt{1-1/x^2}\Big)/2 \\ &= \frac{1}{2}\arccos(1/x)-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}/x^2 \end{aligned}$$

(ii) Bestimmtes Integral $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1}/x^3 \,\mathrm{d}x$:
Einsetzen in die Stammfunktion $\quad \rightsquigarrow$

$$\left[\frac{1}{2}\arccos(1/x) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}/x^2\right]_{x=1}^{x=\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\arccos(1/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\sqrt{2-1}/2\right) - \left(\frac{1}{2}\arccos 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-1}/2\right)$$

$$(\pi/8 - 1/4) - (0-0) = (\pi-2)/8$$