Riemann-Integral

Das Riemann-Integral einer stückweise stetigen Funktion f ist durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

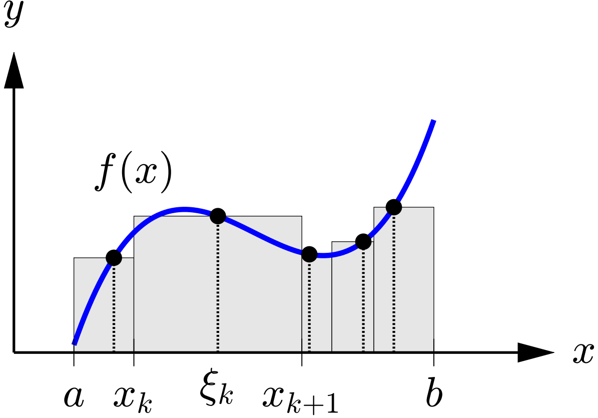
definiert. Dabei bezeichnet $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k$$

ist die maximale Intervalllänge und ξ_k ist ein beliebiger Punkt im k-ten Intervall. Gebräuchlich ist ebenfalls die abgekürzte Schreibweise $\int_a^b f$.

Die Summen auf der rechten Seite der Integraldefinition werden Riemann-Summen genannt und können als Integral einer Treppenfunktion interpretiert werden.

Aufgrund der fest gewählten Integrationsgrenzen wird $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ als bestimmtes Integral bezeichnet.



Für eine positive Funktion f entspricht $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dem Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen von f.

Beweis

Nachweis der Konvergenz der Riemann-Summen für stetig differenzierbares f mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums
zu zeigen:

$$\left| \int_a^b f_{\Delta_m} - \int_a^b f_{\Delta_n} \right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n > N_\varepsilon$$

für jede Folge $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ von Zerlegungen mit $|\Delta_i| \to 0$

Vergleich der Riemann-Summen mit Hilfe einer Zerlegung Δ bestehend aus der Vereinigung der Unterteilungspunkte von Δ_m und Δ_n
Δ_m: x_i, $i = 0, \ldots, k_m$, Δ_n: y_i, $i = 0, \ldots, k_n$
und
Δ: z_j, $j = 0, \ldots, k$ mit der Riemann-Summe

$$\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\, \Delta z_j, \quad \zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$$

Mittelwertsatz $\implies$

$$|f(r) - f(s)| \le |r - s| \max_t |f'(t)|$$

$\sum_{x_{i-1} \le z_{j-1} < z_j \le x_i} \Delta z_j = \Delta x_i$ und $|\zeta_j - \xi_i| \le (x_i - x_{i-1}) \le |\Delta_m|$ für $\zeta_j \in [x_{i-1}, x_i]$ sowie $\sum_{i=1}^{k_m} \Delta x_i = b - a \quad \implies$

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_\Delta - \int_a^b f_{\Delta_m} \right| &= \left| \sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\, \Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\, \Delta x_i \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \le z_{j-1} < z_j \le x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i)) \Delta z_j \right| \\
&\le |\Delta_m| \underbrace{\max_{t \in [a,b]} |f'(t)|}_{=c} \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \le z_{j-1} < z_j \le x_i} \Delta z_j}_{=b-a},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left|\int_a^b f_\Delta - \int_a^b f_{\Delta_m}\right| \le c\,(b-a)\,|\Delta_m|$$

analoge Abschätzung für $|\int_a^b f_\Delta - \int_a^b f_{\Delta_n}| \quad \rightsquigarrow$

$$\left|\int_a^b f_{\Delta_m} - \int_a^b f_{\Delta_n}\right| \le c\,(b-a)\,(|\Delta_m| + |\Delta_n|) \to 0 \quad m,n \to \infty$$

analog: Konvergenz zweier Folgen gegen den gleichen Grenzwert

ebenfalls analog: Beweis für stückweise stetiges f, basierend auf der gleichmäßigen Stetigkeit von f:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \quad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta$$

Beispiel

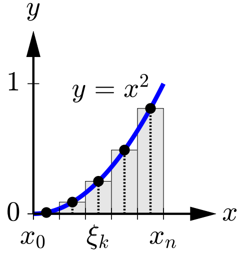
Berechnung von $\int_0^1 x^2\,dx$ mit Riemann-Summen

Folge von Partitionen

$$\Delta_n : x_k = k/n\,,\ k = 0, \ldots, n$$

Auswertungsstellen

$$\xi_k = (2k-1)/(2n)\,,\ k = 1, \ldots, n$$



Grenzwert der Riemann-Summen

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_{\Delta_n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right) \\ &= \frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$

Eigenschaften des Riemann-Integrals

Das bestimmte Integral besitzt folgende Eigenschaften:

- Linearität: $\displaystyle \int_a^b r\, f = r \int_a^b f, \; \int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Monotonie: $\displaystyle f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g$
- Additivität: $\displaystyle \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

In Übereinstimmung mit der letzten Eigenschaft definiert man $\int_b^a f = -\int_a^b f$.