Rationale Funktionen von Sinus und Kosinus

Mit der Substitution

$$x = \tan(t/2), \quad -\pi < t < \pi$$

erhält man für eine beliebige rationale Funktion r

$$\int r(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

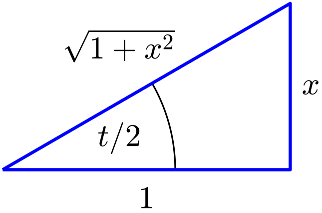
Damit lässt sich ein trigonometrischer in einen rationalen Integranden überführen, der mit Partialbruchzerlegung berechnet werden kann.

Beweis

Satz des Pythagoras $\rightsquigarrow$

$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}$

$\sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$



$(\mathrm{d}/\mathrm{d}u)\tan u = 1/\cos^2 u \quad \Longrightarrow$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\,\mathrm{d}t$$

und Anwendung der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \cos t &= \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \\ \sin t &= 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Beispiel

Umwandlung von $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$, $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ in rationale Integrale

Substitution $x = \tan(t/2)$, $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x/(1+x^2)$, $\sin t = 2x/(1+x^2)$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c = \ln|\tan(t/2)| + c$$

analog: $\cos t = (1-x^2)/(1+x^2)$, Partialbruchzerlegung $\quad\rightsquigarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

Rücksubstitution $\quad\rightsquigarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c$$

Beispiel

Stammfunktion von $f(t) = \dfrac{1}{1 + \sin t - \cos t}$

(i) Trigonometrische Substitution:
$x = \tan(t/2)$, $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x/(1+x^2)$, $\sin t = 2x/(1+x^2)$,
$\cos t = (1-x^2)/(1+x^2) \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int f(t)\,\mathrm{d}t &= \int \frac{1}{1 + 2x/(1+x^2) - (1-x^2)/(1+x^2)}\,\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(ii) Partialbruchzerlegung:
Ansatz

$$r(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

$*x$ und $x = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1$
$*(x+1)$ und $x = -1 \quad \Longrightarrow \quad b = 1$

(iii) Bilden der Stammfunktionen:
$r(x) = 1/x - 1/(x+1) \quad \rightsquigarrow$

$$R(x) = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

Rücktransformation ($x = \tan(t/2)$, $1/x = \cot(t/2)$) $\quad \rightsquigarrow$

$$F(t) = \ln\left|\frac{\tan(t/2)}{\tan(t/2)+1}\right| = \ln\left|\frac{1}{1+\cot(t/2)}\right|$$