Partielle Integration

Aus der Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ ergibt sich eine analoge Formel für unbestimmte Integrale:

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Entsprechend gilt

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b f\,g'$$

für bestimmte Integrale.

Dabei ist zu beachten, dass der Randterm $[f\,g]_a^b$ verschwindet, wenn eine der beiden Funktionen an den Intervallendpunkten Null ist. Er entfällt ebenfalls für periodische Funktionen mit Periodenlänge $(b-a)$.

Die partielle Integration eignet sich zur Integration von Produkten, bei denen ein Faktor durch Differenzieren einfacher wird (z.B. ein Polyom) oder zumindestens nicht komplizierter (z.B. Exponentialfunktionen oder trigonometrische Funktionen).

Beispiel

Partielle Integration von $x\sqrt{1 \pm x}$

$\int (1+x)^s \, \mathrm{d}x = \frac{1}{s+1}(1+x)^{s+1} + c$ für $s \neq -1 \implies$

$$\begin{aligned}
\int \underset{f}{x} \underset{g'}{\sqrt{1+x}} \, \mathrm{d}x &= \underset{f}{x} \underset{g}{(2/3)(x+1)^{3/2}} - \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{(2/3)(1+x)^{3/2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \underbrace{\frac{2}{3}\frac{2}{5}}_{2/15} (1+x)^{5/2} + c
\end{aligned}$$

analog: $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)(-(2/3)(1-x)^{3/2}) = \sqrt{1-x} \quad \implies$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underset{f}{x} \underset{g'}{\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x &= \left[-x \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} \right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} \, \mathrm{d}x \\
&= 0 - \left[\frac{4}{15} (1-x)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Beispiel

Partielle Integration logarithmischer Faktoren

(i) $\int f'g = fg - \int fg'$ mit $f'(x) = x^n$, $f(x) = x^{n+1}/(n+1)$, $g(x) = \ln|x|$, $g'(x) = 1/x \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\int x^n \ln|x| \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln|x| - \int \frac{1}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln|x| - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + c\end{aligned}$$

(ii) Analoge Integration von Ausdrücken der Form $\sum_{j,k} a_{j,k} x^j (\ln|x|)^k$, z.B.

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x^2 (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x &\underset{*}{=} [(x^3/3)(\ln x)^2]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} (x^3/3)(2\ln x/x) \, \mathrm{d}x \\ &= (\mathrm{e}^3/3 \cdot 1^2 - 1/3 \cdot 0^2) - \int_1^{\mathrm{e}} (2/3)(x^2 \ln x) \, \mathrm{d}x \,,\end{aligned}$$

* Kettenregel: $z = (y)^2$, $y = \ln x \quad \rightsquigarrow \quad z'(x) = (\mathrm{d}z/\mathrm{d}y)(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) = (2y)/x$
Berechnung des verbleibenden Integrals mit der Stammfunktion aus (i)

Beispiel

Partielle Integration von Produkten aus Monomen und Exponentialfunktionen

(i) Unbestimmtes Integral:

$(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow$

$$\int \underbrace{x^n}_{f} \; \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g'} \; \mathrm{d}x = \underbrace{x^n}_{f} \; \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g} - \int \underbrace{nx^{n-1}}_{f'} \; \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g} \; \mathrm{d}x$$

partielle Integration $\rightsquigarrow$ gleicher Typ $\rightsquigarrow$ erneute partielle Integration

$$\begin{aligned} -\int nx^{n-1}\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= -nx^{n-1}\mathrm{e}^x + \int n(n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= -nx^{n-1}\mathrm{e}^x + n(n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^x - \int n(n-1)(n-2)x^{n-3}\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \ldots \end{aligned}$$

Hinzufügen des Terms $x^n\mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad \int x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + c$

(ii) Bestimmtes Integral:
konkreter Fall eines quadratischen Polynoms

$$\int_0^1 \underbrace{(x^2-3x+1)}_{f}\;\underbrace{e^x}_{g'}\,\mathrm{d}x = \Big[\underbrace{(x^2-3x+1)}_{f}\;\underbrace{e^x}_{g}\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \underbrace{(2x-3)}_{f'}\;\underbrace{e^x}_{g}\,\mathrm{d}x$$

erster Term

$$[fg]_{x=0}^{x=1} = (1-3+1)e^1 - (0-0+1)e^0 = -e-1$$

zweiter Term, berechnet mit erneuter partieller Integration

$$\begin{aligned} -\int_0^1 f'g &= -\left([(2x-3)e^x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 2e^x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\Big((-e+3) - 2[e^x]_{x=0}^{x=1}\Big) \\ &= e-3+2e-2 = 3e-5 \end{aligned}$$

Summe der Terme $\quad\rightsquigarrow\quad \int_0^1 fg' = 2e-6$

(iii) Produkte mit trigonometrischen Funktionen:

$$\int \underset{f}{x^n} \underset{g'}{\left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\}} \, \mathrm{d}x = \underset{f}{x^n} \underset{g}{\left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\}} - \int \underset{f'}{n x^{n-1}} \underset{g}{\left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\}} \, \mathrm{d}x$$

Beispiel

Paradox bei partieller Integration

$(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x, \quad (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\cosh x = \sinh x,\ (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\sinh x = \cosh x$
partielle Integration $\int fg' = fg - \int f'g$ mit
(1) $f = \mathrm{e}^x,\ g' = \sinh x$ und (2) $f = \mathrm{e}^x,\ g' = \cosh x \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sinh x \,\mathrm{d}x &\underset{(1)}{=} \mathrm{e}^x \cosh x - \int \mathrm{e}^x \cosh x \,\mathrm{d}x \\ &\underset{(2)}{=} \mathrm{e}^x \cosh x - \mathrm{e}^x \sinh x + \int \mathrm{e}^x \sinh x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ (vermeintlicher) Widerspruch: $\mathrm{e}^x \cosh x = \mathrm{e}^x \sinh x$
Erklärung: Identität zwischen Stammfunktionen beinhaltet (unbestimmte) Integrationskonstante c
$c = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\mathrm{e}^x \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}}_{\cosh x} = \mathrm{e}^x \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}_{\sinh x} + c \quad \checkmark$$

Beispiel

Integration von $e^{ax}\sin(bx)$ und $e^{ax}\cos(bx)$ mit alternativen Methoden

(i) Zweimalige partielle Integration:

$$I = \int \underbrace{e^{ax}}_{f'} \underbrace{\sin(bx)}_{g} \, \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{f} \underbrace{\sin(bx)}_{g} - \int \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{f} \underbrace{b\cos(bx)}_{g'} \, \mathrm{d}x$$

nochmalige partielle Integration mit $f' = e^{ax}/a$ und $g = b\cos(bx)$ $\rightsquigarrow$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) - \frac{b}{a}\frac{e^{ax}}{a}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\underbrace{\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x}_{I}$$

Auflösen nach I $\rightsquigarrow$

$$I = \int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

(ii) Komplexe Methode:
Formel von Euler-Moivre, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t \quad \Longrightarrow$

$$\cos t = \operatorname{Re}\left(\exp(\mathrm{i}t)\right)$$

Anwendung auf den kontreten Integrand $\mathrm{e}^t \cos t \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \mathrm{e}^t \cos(t)\,\mathrm{d}t &= \operatorname{Re}\left(\int_0^\pi \exp(t+\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t\right) = \operatorname{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_{t=0}^{t=\pi}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi+\mathrm{i}\pi} - \mathrm{e}^{0+0}}{1+\mathrm{i}}\right) \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, Erweitern mit $1-\mathrm{i}$, $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 1+1 = 2 \quad \rightsquigarrow$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-\mathrm{e}^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-\mathrm{e}^\pi - 1}{2}(1-\mathrm{i})\right) = -\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$$

Beispiel

Orthogonalität trigonometrischer Funktionen

kein Randterm bei partieller Integration periodischer Funktionen über Periodizitätsintervalle $[a, b]$ d.h. $\int_a^b f'g = -\int_a^b fg'$

$\rightsquigarrow$ Anwendung auf Produkte von Sinus und Kosinus, z.B.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \underset{f'}{\sin(nx)}\, \underset{g}{\sin(mx)}\, \mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} \underset{f}{(-\cos(nx)/n)}\, \underset{g'}{(m\cos(mx))}\, \mathrm{d}x$$

erneute partielle Integration mit $f' = -\cos(nx)/n$, $g = m\cos(mx)$ $\quad\rightsquigarrow$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin(nx)/n^2)(-m^2\sin(mx))\,\mathrm{d}x = \frac{m^2}{n^2} I$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n$$

$m = n$: Identität nach der ersten partiellen Integration, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x$, und $\cos^2(nx) = 1 - \sin^2(nx) \quad \Longrightarrow$

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

analoges Argument $\quad \rightsquigarrow \quad$ Orthogonalität von $\cos(nx)$