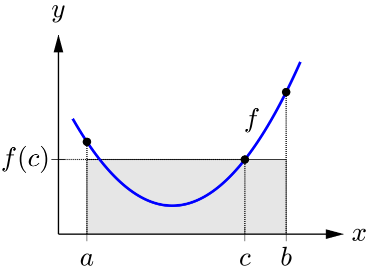
Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sind die Funktionen f und g auf $[a, b]$ stetig und besitzt g keinen Vorzeichenwechsel, so existiert $c \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f\, g = f(c) \int_a^b g\,.$$



Insbesondere ist, wie in der Abbildung veranschaulicht, $\int_a^b f = (b - a) f(c)$.

Beweis

o.B.d.A. $g \geq 0$

Abschätzung des Integranden $\quad \rightsquigarrow$

$$(\min_{[a,b]} f)\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\max_{[a,b]} f)\, g(x)$$

Integration $\quad \rightsquigarrow$

$$(\min_{[a,b]} f) \int_a^b g \leq \int_a^b f\, g \leq (\max_{[a,b]} f) \int_a^b g$$

Zwischenwertsatz $\quad \implies$

$$\left(\int_a^b f\, g\right) \Big/ \left(\int_a^b g\right) = f(c) \quad \text{für ein } c \in [a, b]$$

Gegenbeispiel bei Vorzeichenwechsel von g:

$$\underbrace{\int_{-1}^1 x^2 \,\mathrm{d}x}_{>0} = \int_{-1}^1 \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{x}_{g} \,\mathrm{d}x \neq c \int_{-1}^1 x \,\mathrm{d}x = 0$$