Integration trigonometrischer Polynome

Aus

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

folgt für ein trigonometrisches Polynom p

$$\int \underbrace{\sum_{|k|\leq n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}_{p(x)}\,\mathrm{d}x = c + c_0 x + \sum_{0\neq|k|\leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0\,.$$

Mit Hilfe der Formeln von Euler-Moivre,

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}, \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\,,$$

können auf diese Weise auch beliebige Polynome in $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ integriert werden.

Beispiel

Berechnung von $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin^4 x}_{p(x)} = \,\mathrm{d}x$

(i) Komplexe Methode:

Formel von Euler-Moivre, binomische Formel $\quad\rightsquigarrow\quad$ Integrand

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)\right)^4 &= \frac{1}{(2\mathrm{i})^4}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\mathrm{e}^{(4-k)\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-k\mathrm{i}x} \\
&= \frac{1}{16}\underbrace{\binom{4}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}_{\text{Term für } k=2} + \frac{1}{16}\sum_{\ell\neq 0} c_\ell e^{\mathrm{i}\ell x} \\
&= \frac{6}{16} + \frac{1}{16}\sum_{\ell\neq 0} c_\ell e^{\mathrm{i}\ell x}
\end{aligned}$$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_\ell c_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x}\,\mathrm{d}x = 2\pi c_0 \quad\rightsquigarrow\quad$ Integral $2\pi\cdot 6/16 = 3\pi/4$

(ii) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin x \sin^3 x \,\mathrm{d}x \\
&= (-\cos x)\sin^3 x - 3\int(-\cos x)(\sin^2 x)\cos x \,\mathrm{d}x \\
&\underset{*}{=} -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x - 3\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

(*) $\quad -\cos x \sin^2 x \cos x = -\cos^2 x \sin^2 x = -(1-\sin^2 x)\sin^2 x$

Auflösen nach $\int \sin^4 \quad \leadsto$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[-\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = 0 + 3\pi/4$$