Integration rationaler Funktionen

Durch reelle Partialbruchzerlegung lässt sich eine reelle rationale Funktion als Summe der drei elementaren Grundtypen

$$ax^n\,, \quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,, \quad \frac{c(x-a)+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ darstellen. Mit Hilfe der Stammfunktionen für diese Grundfunktionen können somit die Stammfunktionen für beliebige rationale Funktionen bestimmt werden.

Beispiel

Berechnung von

$$\int r(x)\,\mathrm{d}x, \quad r(x) = \frac{x^5 + 10x^3 + 5x^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9}$$

mit Hilfe von Partialbruchzerlegung

Polynomdivision $\quad \rightsquigarrow$

$$r(x) = x + \frac{2x^3 + 5x^2 + 8x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9}$$

Faktorisierung des Nenners $\quad \rightsquigarrow$

$$x^4 + 8x^2 - 9 = (x+1)(x-1)(x^2+9)$$

Ansatz

$$r(x) - x = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx}{x^2+9} + \frac{d}{x^2+9}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$2x^3 + 5x^2 + 8x + 25 = \\ a(x-1)(x^2+9) + b(x+1)(x^2+9) + (cx+d)(x^2-1)$$

Koeffizienten-Vergleich $\implies$ $a = -1,\ b = 2,\ c = 1$ und $d = 2$
Stammfunktionen der Grundfunktionen $\rightsquigarrow$

$$\int \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9} = \\ \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \int \frac{2\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+9} + \int \frac{2\mathrm{d}x}{x^2+9} = \\ \frac{1}{2}x^2 - \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c$$