Riemann-Integral

Das Riemann-Integral einer stückweise stetigen Funktion f ist durch

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

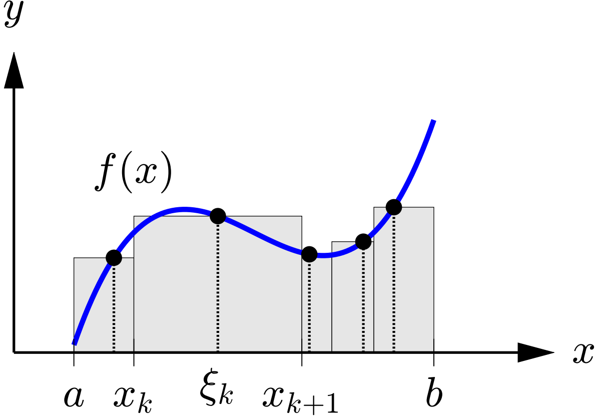
definiert. Dabei bezeichnet $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k$$

ist die maximale Intervalllänge und ξ_k ist ein beliebiger Punkt im k-ten Intervall. Gebräuchlich ist ebenfalls die abgekürzte Schreibweise $\int_a^b f$.

Die Summen auf der rechten Seite der Integraldefinition werden Riemann-Summen genannt und können als Integral einer Treppenfunktion interpretiert werden.

Aufgrund der fest gewählten Integrationsgrenzen wird $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ als bestimmtes Integral bezeichnet.



Für eine positive Funktion f entspricht $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dem Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen von f.

Beweis

Nachweis der Konvergenz der Riemann-Summen für stetig differenzierbares f mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums
zu zeigen:

$$\left| \int_a^b f_{\Delta_m} - \int_a^b f_{\Delta_n} \right| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n > N_\varepsilon$$

für jede Folge $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ von Zerlegungen mit $|\Delta_i| \to 0$

Vergleich der Riemann-Summen mit Hilfe einer Zerlegung Δ bestehend aus der Vereinigung der Unterteilungspunkte von Δ_m und Δ_n
Δ_m: x_i, $i = 0, \ldots, k_m$, Δ_n: y_i, $i = 0, \ldots, k_n$
und
Δ: z_j, $j = 0, \ldots, k$ mit der Riemann-Summe

$$\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\, \Delta z_j, \quad \zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$$

Mittelwertsatz $\quad \Longrightarrow$

$$|f(r) - f(s)| \leq |r - s| \max_t |f'(t)|$$

$\sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} \Delta z_j = \Delta x_i$ und $|\zeta_j - \xi_i| \leq (x_i - x_{i-1}) \leq |\Delta_m|$ für $\zeta_j \in [x_{i-1}, x_i]$ sowie $\sum_{i=1}^{k_m} \Delta x_i = b - a \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_\Delta - \int_a^b f_{\Delta_m} \right| &= \left| \sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\, \Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\, \Delta x_i \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i)) \Delta z_j \right| \\
&\leq |\Delta_m| \underbrace{\max_{t \in [a,b]} |f'(t)|}_{=c} \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} \Delta z_j}_{=b-a},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\left| \int_a^b f_\Delta - \int_a^b f_{\Delta_m} \right| \le c\,(b-a)\,|\Delta_m|$$

analoge Abschätzung für $|\int_a^b f_\Delta - \int_a^b f_{\Delta_n}| \quad \rightsquigarrow$

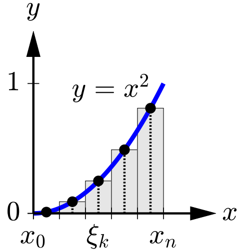
$$\left| \int_a^b f_{\Delta_m} - \int_a^b f_{\Delta_n} \right| \le c\,(b-a)\,(|\Delta_m| + |\Delta_n|) \to 0 \quad m,n \to \infty$$

analog: Konvergenz zweier Folgen gegen den gleichen Grenzwert

ebenfalls analog: Beweis für stückweise stetiges f, basierend auf der gleichmäßigen Stetigkeit von f:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \quad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta$$

Berechnung von $\int_0^1 x^2\,dx$ mit Riemann-Summen



Folge von Partitionen

$$\Delta_n : x_k = k/n\,,\ k = 0, \ldots, n$$

Auswertungsstellen

$$\xi_k = (2k-1)/(2n)\,,\ k = 1, \ldots, n$$

Grenzwert der Riemann-Summen

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_{\Delta_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{k=1}^n k^2 - 4\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1\right) \\ &= \frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$

Eigenschaften des Riemann-Integrals

Das bestimmte Integral besitzt folgende Eigenschaften:

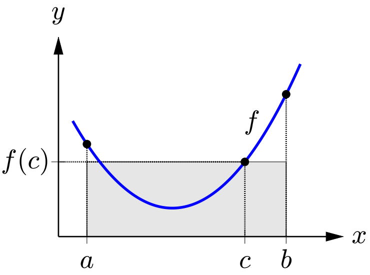
- Linearität: $\displaystyle\int_a^b r\,f = r\int_a^b f, \quad \int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Monotonie: $\displaystyle f \le g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \le \int_a^b g$
- Additivität: $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

In Übereinstimmung mit der letzten Eigenschaft definiert man $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sind die Funktionen f und g auf $[a, b]$ stetig und besitzt g keinen Vorzeichenwechsel, so existiert $c \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f\, g = f(c) \int_a^b g\,.$$



Insbesondere ist, wie in der Abbildung veranschaulicht, $\int_a^b f = (b-a)f(c)$.

Beweis

o.B.d.A. $g \geq 0$

Abschätzung des Integranden $\rightsquigarrow$

$$(\min_{[a,b]} f)\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\max_{[a,b]} f)\, g(x)$$

Integration $\rightsquigarrow$

$$(\min_{[a,b]} f) \int_a^b g \leq \int_a^b f\, g \leq (\max_{[a,b]} f) \int_a^b g$$

Zwischenwertsatz $\implies$

$$\left(\int_a^b f\, g\right) \Big/ \left(\int_a^b g\right) = f(c) \quad \text{für ein } c \in [a, b]$$

Gegenbeispiel bei Vorzeichenwechsel von g:

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\, \mathrm{d}x}_{>0} = \int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{x}_{g}\, \mathrm{d}x \neq c \int_{-1}^{1} x\, \mathrm{d}x = 0$$

Stammfunktion

Eine Funktion F mit $F' = f$ ist eine Stammfunktion von f, und man schreibt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$

für die Menge aller Stammfunktionen, die als unbestimmtes Integral von f bezeichnet wird. Ebenfalls gebräuchlich ist die Kurzschreibweise $\int f = F + c$.

Die Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$ ist beliebig. Beispielsweise ist

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}x$$

mit $F_a(a) = 0$ eine mögliche Stammfunktion.

Nicht zu allen elementaren Funktionen ist die explizite Angabe einer Stammfunktion möglich. Ein Beispiel ist $f(x) = \exp(x^2)$.

Spezielle Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

Hauptsatz der Integralrechnung

Ist F eine Stammfunktion einer stetigen Funktion f, d.h. $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

bzw. in Kurzschreibweise

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

Ein bestimmtes Integral lässt sich also als Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion an den Intervallendpunkten berechnen.

Beweis

betrachte beide Seiten der zu beweisenden Identität

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

als Funktion von b

Übereinstimmung für $b = a$ (beide Seiten Null)

$\rightsquigarrow$ genügt Gleichheit der Ableitungen zu zeigen

Ableitung der linken Seite

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f$$

Mittelwertsatz $\implies$

$$\int_b^{b+h} f = (b + h - b)\, f(c) = h\, f(c)$$

mit $c \in (b, b+h)$

$f(c) \to f(b) \implies$ Ableitung der linken Seite gleich $f(b)$

gleicher Wert für die Ableitung der rechten Seite ($F' = f$)

Beispiel

Integration von Polynomen, illustriert für $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(i) Stammfunktion und bestimmtes Integral:
$\int x^k \,\mathrm{d}x = x^{k+1}/(k+1) + c \qquad \Longrightarrow$

$$\int p(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2 - 4x + 3\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 4\,\frac{x^2}{2} + 3x \, + \, c\,,$$

d.h. $P(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x$,

Bestimmtes Integral, beispielsweise über das Intervall $[-1, 2]$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} x^2 - 4x + 3\,\mathrm{d}x &= [x^3/3 - 2x^2 + 3x]_{x=-1}^{x=2} \\ &= (8/3 - 8 + 6) - (-1/3 - 2 - 3) = 6 \end{aligned}$$

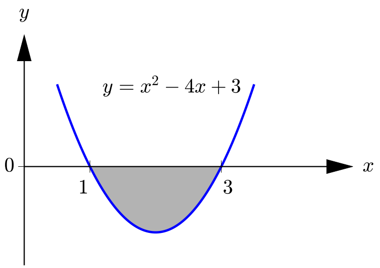
(ii) Fläche, eingeschlossen mit der x-Achse:

Nullstellen x_k $\rightsquigarrow$ Randpunkte

Formel für die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Longrightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{(4/2)^2 - 3} = 2 \pm 1\,,$$

d.h. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$



Berechnung der Fläche als bestimmtes Integral (negatives Vorzeichen des Integrals, da der Funktionsgraph im relevanten Intervall $[x_1, x_2]$ unterhalb der x-Achse liegt) $\rightsquigarrow$

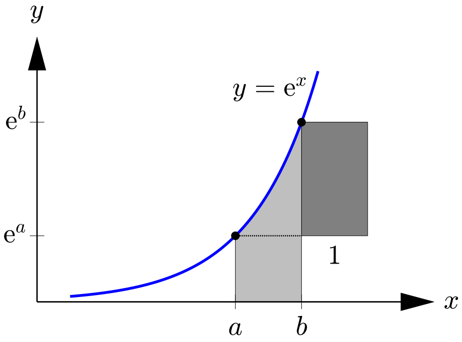
$$\begin{aligned} -\int_1^3 x^2 - 4x + 3\,\mathrm{d}x &= -[x^3/3 - 2x^2 + 3x]_{x=1}^{x=3} \\ &= -(3^3/3 - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3) + (1/3 - 2 + 3) \\ &= -0 + 4/3 = 4/3 \end{aligned}$$

Integration der Exponential-Funktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\exp x}_{f(x)} = \exp x$$

$\rightsquigarrow$ Stammfunktion $F(x) = \exp x$
und

$$\int_a^b \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{x=a}^{x=b} = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$$



Die Fläche unter dem Graph zwischen a und b entspricht einem Rechteck mit Breite 1 und dem Abstand der Funktionswerte als Höhe.

Beispiel

Integration von $f(x) = 1/(1+x^2)$ und $g(x) = \tan x$

Stammfunktionen

$$F(x) = \arctan x + c, \quad G(x) = -\ln(\cos x),\ |x| < \pi/2$$

Anwendung des Hauptsatzes $\int_a^b f = [F]_a^b$ für konkrete Intervalle $[a, b]$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad = \quad [\arctan]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \,\mathrm{d}x \quad = \quad -[\ln(\cos x)]_{x=0}^{x=\pi/4} = -\ln(1/\sqrt{2}) + \ln(1) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Beispiel

Kraft auf einen Körper der Masse m im Gravitationsfeld eines Planeten mit Masse M:

$$f(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$$

mit γ der Gravitationskonstante und x dem Abstand der Schwerpunkte

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\gamma \frac{mM}{x}}_{F(x)} + c$$

Arbeit bei Bewegung vom Abstand $x = a$ zum Abstand $x = b$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\gamma \frac{mM}{x}\right]_{x=a}^{x=b} = \gamma mM \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

a: Radius r des Planeten, $b \to \infty$ und Gleichsetzen mit der kinetischen Energie $\rightsquigarrow$ Fluchtgeschwindigkeit:

$$\frac{m}{2} v^2 = \gamma \frac{mM}{r} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\gamma 2M/r}$$

$v_{\text{Erde}} = 11.2\,\text{km/s}$

Partielle Integration

Aus der Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ ergibt sich eine analoge Formel für unbestimmte Integrale:

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Entsprechend gilt

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b f\,g'$$

für bestimmte Integrale.

Dabei ist zu beachten, dass der Randterm $[f\,g]_a^b$ verschwindet, wenn eine der beiden Funktionen an den Intervallendpunkten Null ist. Er entfällt ebenfalls für periodische Funktionen mit Periodenlänge $(b-a)$.

Die partielle Integration eignet sich zur Integration von Produkten, bei denen ein Faktor durch Differenzieren einfacher wird (z.B. ein Polyom) oder zumindestens nicht komplizierter (z.B. Exponentialfunktionen oder trigonometrische Funktionen).

Beispiel

Partielle Integration von $x\sqrt{1 \pm x}$

$\int (1+x)^s \,\mathrm{d}x = \frac{1}{s+1}\,(1+x)^{s+1} + c$ für $s \neq -1 \implies$

$$\begin{aligned}
\int \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x &= \underset{f}{x}\,\underset{g}{(2/3)(x+1)^{3/2}} - \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{(2/3)(1+x)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \underbrace{\frac{2}{3}\frac{2}{5}}_{2/15}(1+x)^{5/2} + c
\end{aligned}$$

analog: $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)(-(2/3)(1-x)^{3/2}) = \sqrt{1-x} \implies$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x &= \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Beispiel

Partielle Integration logarithmischer Faktoren

(i) $\int f'g = fg - \int fg'$ mit $f'(x) = x^n$, $f(x) = x^{n+1}/(n+1)$, $g(x) = \ln|x|$, $g'(x) = 1/x \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\int x^n \ln|x|\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln|x| - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln|x| - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c\end{aligned}$$

(ii) Analoge Integration von Ausdrücken der Form $\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$, z.B.

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x^2\,(\ln x)^2\,\mathrm{d}x &\underset{*}{=} [(x^3/3)(\ln x)^2]_{x=1}^{x=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} (x^3/3)(2\ln x/x)\,\mathrm{d}x \\ &= (\mathrm{e}^3/3\cdot 1^2 - 1/3\cdot 0^2) - \int_1^{\mathrm{e}} (2/3)(x^2\ln x)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

* Kettenregel: $z = (y)^2$, $y = \ln x \quad \rightsquigarrow \quad z'(x) = (\mathrm{d}z/\mathrm{d}y)(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) = (2y)/x$
Berechnung des verbleibenden Integrals mit der Stammfunktion aus (i)

Beispiel

Partielle Integration von Produkten aus Monomen und Exponentialfunktionen

(i) Unbestimmtes Integral:

$(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow$

$$\int \underbrace{x^n}_{f} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{x^n}_{f} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g} - \int \underbrace{nx^{n-1}}_{f'} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g} \,\mathrm{d}x$$

partielle Integration $\rightsquigarrow$ gleicher Typ $\rightsquigarrow$ erneute partielle Integration

$$\begin{aligned} -\int nx^{n-1}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= -nx^{n-1}\mathrm{e}^x + \int n(n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= -nx^{n-1}\mathrm{e}^x + n(n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^x - \int n(n-1)(n-2)x^{n-3}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \ldots \end{aligned}$$

Hinzufügen des Terms $x^n\mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + c$

(ii) Bestimmtes Integral:
konkreter Fall eines quadratischen Polynoms

$$\int_0^1 \underset{f}{(x^2-3x+1)}\;\underset{g'}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \Big[\underset{f}{(x^2-3x+1)}\;\underset{g}{\mathrm{e}^x}\Big]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \underset{f'}{(2x-3)}\;\underset{g}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

erster Term

$$[fg]_{x=0}^{x=1} = (1-3+1)\mathrm{e}^1 - (0-0+1)\mathrm{e}^0 = -\mathrm{e}-1$$

zweiter Term, berechnet mit erneuter partieller Integration

$$\begin{aligned} -\int_0^1 f'g &= -\left([(2x-3)\mathrm{e}^x]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\Big((-\mathrm{e}+3) - 2[\mathrm{e}^x]_{x=0}^{x=1}\Big) \\ &= \mathrm{e}-3+2\mathrm{e}-2 = 3\mathrm{e}-5 \end{aligned}$$

Summe der Terme $\quad\rightsquigarrow\quad \int_0^1 fg' = 2\mathrm{e}-6$

(iii) Produkte mit trigonometrischen Funktionen:

$$\int \underbrace{x^n}_{f} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\}}_{g'} \mathrm{d}x = \underbrace{x^n}_{f} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\}}_{g} - \int \underbrace{n x^{n-1}}_{f'} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\}}_{g} \mathrm{d}x$$

Paradox bei partieller Integration

$(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x, \quad (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\cosh x = \sinh x,\ (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\sinh x = \cosh x$
partielle Integration $\int fg' = fg - \int f'g$ mit
(1) $f = \mathrm{e}^x,\ g' = \sinh x$ und (2) $f = \mathrm{e}^x,\ g' = \cosh x \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sinh x \,\mathrm{d}x &\underset{(1)}{=} \mathrm{e}^x \cosh x - \int \mathrm{e}^x \cosh x \,\mathrm{d}x \\ &\underset{(2)}{=} \mathrm{e}^x \cosh x - \mathrm{e}^x \sinh x + \int \mathrm{e}^x \sinh x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ (vermeintlicher) Widerspruch: $\mathrm{e}^x \cosh x = \mathrm{e}^x \sinh x$
Erklärung: Identität zwischen Stammfunktionen beinhaltet (unbestimmte) Integrationskonstante c
$c = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\mathrm{e}^x \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}}_{\cosh x} = \mathrm{e}^x \underbrace{\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}}_{\sinh x} + c \quad \checkmark$$

Beispiel

Integration von $e^{ax}\sin(bx)$ und $e^{ax}\cos(bx)$ mit alternativen Methoden

(i) Zweimalige partielle Integration:

$$I = \int \underbrace{e^{ax}}_{f'} \; \underbrace{\sin(bx)}_{g} \; \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{f} \; \underbrace{\sin(bx)}_{g} - \int \underbrace{\frac{e^{ax}}{a}}_{f} \; \underbrace{b\cos(bx)}_{g'} \; \mathrm{d}x$$

nochmalige partielle Integration mit $f' = e^{ax}/a$ und $g = b\cos(bx)$ $\rightsquigarrow$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin(bx) - \frac{b}{a}\frac{e^{ax}}{a}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\underbrace{\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x}_{I}$$

Auflösen nach I $\rightsquigarrow$

$$I = \int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

(ii) Komplexe Methode:
Formel von Euler-Moivre, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t \quad \Longrightarrow$

$$\cos t = \operatorname{Re}\left(\exp(\mathrm{i}t)\right)$$

Anwendung auf den kontreten Integrand $\mathrm{e}^t \cos t \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \mathrm{e}^t \cos(t)\,\mathrm{d}t &= \operatorname{Re}\left(\int_0^\pi \exp(t+\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t\right) = \operatorname{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_{t=0}^{t=\pi}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\pi+\mathrm{i}\pi} - \mathrm{e}^{0+0}}{1+\mathrm{i}}\right)
\end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, Erweitern mit $1-\mathrm{i}$, $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 1+1 = 2 \quad \rightsquigarrow$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{-\mathrm{e}^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{-\mathrm{e}^\pi - 1}{2}(1-\mathrm{i})\right) = -\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}$$

Beispiel

Orthogonalität trigonometrischer Funktionen

kein Randterm bei partieller Integration periodischer Funktionen über Periodizitätsintervalle $[a, b]$ d.h. $\int_a^b f'g = -\int_a^b fg'$

$\rightsquigarrow$ Anwendung auf Produkte von Sinus und Kosinus, z.B.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \underset{f'}{\sin(nx)}\,\underset{g}{\sin(mx)}\,\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} \underset{f}{(-\cos(nx)/n)}\,\underset{g'}{(m\cos(mx))}\,\mathrm{d}x$$

erneute partielle Integration mit $f' = -\cos(nx)/n$, $g = m\cos(mx)$ $\rightsquigarrow$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin(nx)/n^2)(-m^2\sin(mx))\,\mathrm{d}x = \frac{m^2}{n^2} I$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n$$

$m = n$: Identität nach der ersten partiellen Integration, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x$, und $\cos^2(nx) = 1 - \sin^2(nx) \quad \Longrightarrow$

$$2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

analoges Argument $\quad\rightsquigarrow\quad$ Orthogonalität von $\cos(nx)$

Delta-Funktion

Die Diracsche Delta-Funktion δ ist durch

$$\int_{\mathbb{R}} \delta f = f(0)$$

definiert, wobei f eine beliebige stetige Funktion ist, die ausserhalb eines Intervalls (a, b) verschwindet.

Mit Hilfe von partieller Integration oder über einen Grenzwertprozess kann δ als verallgemeinerte Ableitung der Heavisideschen Sprungfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

interpretiert werden.

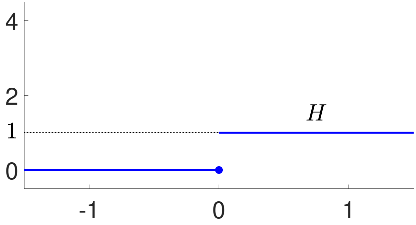
Beweis

(i) Begründung mit Hilfe von partieller Integration:

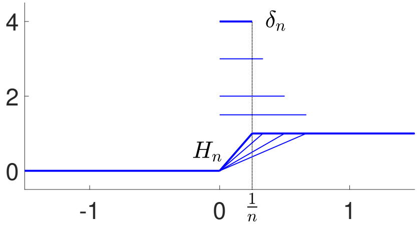
$0 \in (a, b),\ f(a) = 0 = f(b) \quad \Longrightarrow$

$$\int_a^b H'f = \underbrace{[Hf]_a^b}_{=0} - \int_a^b Hf' = -\int_0^b f' = -[f]_0^b = f(0)$$

f beliebig $\quad \rightsquigarrow \quad \int H'f = \int \delta f$



Heaviside-Funktion H



Näherungen H_n, $\delta_n = H_n'$

(ii) Begründung mit Hilfe eines Grenzwertprozesses:

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n)$$

für ein $t_n \in [0, 1/n]$ aufgrund des Mittelwertsatzes
Stetigkeit von $f \quad \Longrightarrow \quad f(t_n) \to f(0)$

Variablensubstitution

Aus der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

folgt für eine Substitution $y = g(x)$ durch Bilden von Stammfunktionen

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(y) + c = \int f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Entsprechend gilt für bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Mit Hilfe von Differentialen lässt sich diese Identität in der suggestiven Form

$$\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{y})\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

schreiben.

Beispiel

Variablensubstitution bei erkennbarer innerer Ableitung

(i) Unbestimmtes Integral:
z.B.

$$\int (\ln x)^2 \, (1/x) \, \mathrm{d}x = \int f(g(x)) \, g'(x) \, \mathrm{d}x$$

mit $f(y) = y^2$, $y = g(x) = \ln x$, $g'(x) = 1/x$
Substitutionsregel $\int f(g(x))g'(x) \, \mathrm{d}x = \int f(y) \, \mathrm{d}y \quad \rightsquigarrow$

$$\int y^2 \, \mathrm{d}y = \frac{1}{3} y^3 + c$$

Rücksubstitution $y = g(x) = \ln x \quad \rightsquigarrow$

$$\int \frac{\ln x^2}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$$

(ii) Bestimmtes Integral:
z.B.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, \cos x \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $f(y) = \sqrt{y}$, $y = g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$
Bilder von $a = 0$, $b = \pi/2$ unter der Abbildung $x \mapsto y$:

$$g(a) = \sin(0) = 0, \quad g(b) = \sin(\pi/2) = 1$$

$\rightsquigarrow$ transformiertes Integral

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{2}{3}\, y^{3/2}\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Beispiel

Stammfunktion $F(y)$ von $(e^y - 1)^{-1}$ für $y > 0$ (Pol bei $y = 0$)

Substituiere $y = g(x) = \ln x \iff x = e^y$ im unbestimmten Integral

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{e^y - 1}\,\mathrm{d}y$$

Transformationsregel, $\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow$

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(g(x))\,\underbrace{g'(x)}_{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)x}\,\mathrm{d}x$$

Partialbruchzerlegung $\frac{1}{(x-1)x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \quad \rightsquigarrow$

$$-\ln|x| + \ln|x-1| + c = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c = \ln|1 - 1/x| + c$$

Rücksubstitution von $x = e^y \quad \rightsquigarrow \quad$ Stammfunktion

$$F(y) = \ln|1 - 1/e^y| = \ln|1 - e^{-y}|$$

Beispiel

Lineare Variablensubstitution

$$y = px + q$$

(i) Unbestimmtes Integral $\int \underbrace{(2x-3)^4}_{f(x)} \, \mathrm{d}x$:

$y = 2x - 3$, $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x \quad \rightsquigarrow$

$$\int (2x-3)^4 \, (\mathrm{d}x/\mathrm{d}y) \, \mathrm{d}y = \int y^4 \, (1/2) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{5 \cdot 2} \, y^5 + c$$

Rücksubstitution $\quad \rightsquigarrow \quad$ Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{10} \, y^5 \Big|_{y=2x-3} = \frac{(2x-3)^5}{10}$$

(ii) Bestimmtes Integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(3-4x)^2}\,\mathrm{d}x$:
Umrechung der Differentiale

$$y = 3 - 4x, \quad \mathrm{d}y = -4\,\mathrm{d}x$$

und Transformation der Grenzen

$$x = -1 \mapsto y = 3 - 4 \cdot (-1) = 7, \quad x = 0 \mapsto y = 3 - 4 \cdot 0 = 3$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{1}{(3-4x)^2}\,(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y &= \int_{7}^{3} (1/y^2)\,(-1/4)\,\mathrm{d}y \\
&= [(-1/y)\,(-1/4)]_{y=7}^{y=3} \\
&= \frac{1}{4 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{21}
\end{aligned}$$

Beispiel

Unbestimmtes und bestimmtes Integral von $f(x) = 1/\sqrt{x^2 - 6x + 5}$

Umformung durch quadratische Ergänzung

$$x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4 = 4\left(((x-3)/2)^2 - 1\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{((x-3)/2)^2 - 1}}$$

(i) Unbestimmtes Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$:
Substitution $y = (x-3)/2$, $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y \quad \rightsquigarrow$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Substitution $y = \cosh t$, $\mathrm{d}y = \sinh t \, \mathrm{d}t \quad \leadsto$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - 1}} &= \int \frac{\sinh t \, \mathrm{d}t}{\sinh t} = \int \mathrm{d}t = t + c \\
&= \operatorname{arcosh} y + c = \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\
&= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 5}\right) + c
\end{aligned}$$

(benutzt: $\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$, Formel für die Umkehrfunktion von cosh)

(ii) Beispiel eines bestimmten Integrals:

$$\begin{aligned}
\int_5^7 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} &= \left[\ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 5}\right)\right]_5^7 \\
&= \ln(4/2 + \sqrt{12}/2) - \ln(2/2 + \sqrt{0}/2) \\
&= \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln 1 = \ln(2 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

Beispiel

Verschiedene Berechnungsmethoden für $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(i) Geometrisches Argument:
$f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$ für $0 \leq x \leq 1$
$\implies \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x$: Inhalt der Fläche A (Viertelkreis) unter dem Funktionsgraph
$\implies \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \pi/4$

(ii) Substitution $x = \sin u$:
$\mathrm{d}x = \cos u\,\mathrm{d}u$ und $x = 0 \mapsto u = 0$, $x = 1 \mapsto u = \frac{\pi}{2} \quad \implies$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 u}}_{\cos u} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}$$

(iii) Substitution $x = \cos u$:
$\mathrm{d}x = -\sin u \, \mathrm{d}u$ und $x = 0 \mapsto u = -\pi/2$, $x = 1 \mapsto u = 2\pi$
(ebenfalls möglich $u = 0$ bzw. $u = 2k\pi$; Eindeutigkeit des Urbildes der Transformationsabbildung nicht erforderlich - gleiche Resultate)
$\implies$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-\cos^2 u}\,(-\sin u)\,\mathrm{d}u \underset{(*)}{=} \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\,\mathrm{d}u = -\frac{5\pi}{4}$$

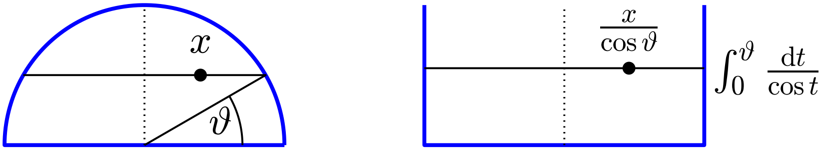
(*) falsche Berechnung der Wurzel
richtig: $\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u| \quad \rightsquigarrow \quad$ korrektes Ergebnis

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\pi/2}^{0} -\sin^2 u\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\,\mathrm{d}u - \cdots \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Beispiel

Mercator-Projektion:
winkeltreue Abbildung der Erdoberfläche auf eine Ebene

$$(x, \sin\vartheta) \mapsto \left(\frac{x}{\cos\vartheta}, \int_0^\vartheta \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}\right)$$



Streckung der Breitenkreise mit dem Faktor $1/\cos\vartheta$

Bestimmung einer Stammfunktion F für $f(t) = 1/\cos t$
Substitution

$$u = \frac{1}{\cos t} + \tan t = \frac{1 + \sin t}{\cos t}, \qquad \mathrm{d}u = \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t &= \int (\cos t)^{-1} \underbrace{\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}\right)^{-1}\,\mathrm{d}u}_{\mathrm{d}t} \\
&= \int \left(\frac{\sin t}{\cos t} + \frac{1}{\cos t}\right)^{-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c \\
&= \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \tan t\right| + c
\end{aligned}$$

Elementare rationale Integranden mit einfachen Polstellen

Die Stammfunktionen der drei Grundtypen rationaler Funktionen sind

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} &= \frac{1}{a} \ln|x+b/a| + c \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c \\
\int \frac{(x-a)\,\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{2} \ln((x-a)^2+b^2) + c
\end{aligned}$$

Beweis

Überprüfung der Stammfunktionen durch Differenzieren

alternativ: Umformung der Integranden

(i) $\int \mathrm{d}y/y = \ln|y| + c \quad \Longrightarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + c$$

(ii) Umformung $\quad \rightsquigarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{((x-a)/b)^2+1}$$

Substitution $y = (x-a)/b$, $\mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}y \quad \rightsquigarrow$

$$\frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c$$

(iii) Substitution $y = (x-a)^2 + b^2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y/(2(x-a))$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-a)\,\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + c\\ &= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + c\end{aligned}$$

Beispiel

Flächen begrenzt durch rationale Funktionsgraphen

(i) $\quad r(x) = \dfrac{2-x}{1+x}$:

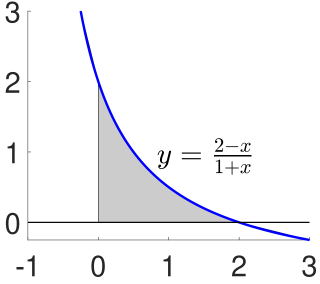
Umformung $\quad \rightsquigarrow \quad r(x) = \dfrac{-1-x}{1+x} + \dfrac{3}{1+x} = -1 + \dfrac{3}{1+x}$

Summe der Stammfunktionen der elementaren Ausdrücke $\quad \rightsquigarrow \quad$ Stammfunktion

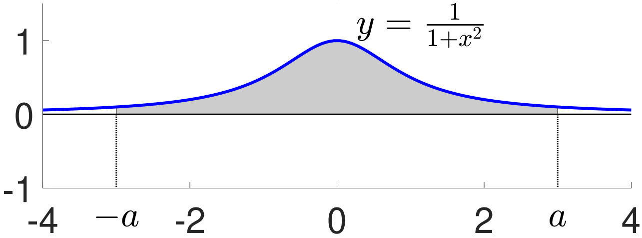
$$R(x) = -x + 3\ln|1+x|$$

$r(2) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Flächeninhalt

$$\int_0^2 r(x)\,\mathrm{d}x = [R(x)]_{x=0}^{x=2}$$
$$= (-2 + 3\ln 3) - (-0 + 3\ln 1)$$
$$= -2 + 3\ln 3$$



(ii) $\quad r(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$:



Flächeninhalt: Grenzwert der Flächeninhalte von
$\{(x,y) : 0 \leq y \leq r(x), -a \leq x \leq a\}$

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{a\to\infty} (\arctan a - \arctan(-a)) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\end{aligned}$$

Beispiel

Berechnung der Stammfunktion von

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

quadratische Ergänzung des Nenners

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)$$

Anpassung des Zählers

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)$$

$\rightsquigarrow$ Zerlegung in Standardausdrücke:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}$$

Stammfunktionen der elementaren Integranden $\rightsquigarrow$

$$\int r(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{9}{4}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

Berechnung eines bestimmten Integrals durch Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion
z.B.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 r(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{4}\left[\ln((x-1)^2+4)\right]_{x=1}^{x=3} + \frac{9}{4}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]_{x=1}^{x=3} \\
&= \frac{3}{4}(\ln 8 - \ln 4) + \frac{9}{4}(\arctan 1 - \arctan 0) \\
&= \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{9}{16}\pi
\end{aligned}$$

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polstellen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int (x-a)^{-n-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

Bei mehrfachen komplex konjugierten Polstellen $a \pm \mathrm{i}b$ mit dem entsprechenden quadratischen Faktor $q(x) = (x-a)^2 + b^2$ gilt

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(x-a)}{2b^2 n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2 n}\int \frac{\mathrm{d}x}{q(x)^n}\,.$$

Die Reduktion des Exponenten von q $(n+1 \to n)$ ermöglicht eine rekursive Berechnung der Stammfunktion.

Beweis

(i) Reelle Polstelle:
Substitution $y = x - a$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \quad \rightsquigarrow$

$$\int (x-a)^{-n-1}\,\mathrm{d}x = \int y^{-n-1}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{n}y^{-n} + c$$

(ii) Komplex konjugierte Polstellen, erster Term:
Substitution $y = (x-a)^2 + b^2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y/(2(x-a)) \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \frac{c}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^{n+1}} = -\frac{c}{2ny^n} \\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n}\end{aligned}$$

(iii) Komplex konjugierte Polstellen, zweiter Term:
zu zeigen

$$\int \frac{d\,\mathrm{d}x}{q(x)^{n+1}} = \frac{d(x-a)}{2b^2 n q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2 n} \int \frac{\mathrm{d}x}{q(x)^n}$$

mit $q(x) = (x-a)^2 + b^2$
Division durch d und Substitution $y = (x-a)/b$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/b$ $\rightsquigarrow$
äquivalente Identität

$$\int \frac{b\,\mathrm{d}y}{(b^2y^2+b^2)^{n+1}} = \frac{by}{2b^2n(b^2y^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n} \int \frac{b\,\mathrm{d}y}{(b^2y^2+b^2)^n}$$

bzw. nach Multiplikation mit b^{2n+1}

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^{n+1}} = \frac{y}{2n(y^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^n}$$

Beweis durch partielle Integration des letzten Terms:

$$\begin{aligned}
&\int 1 \cdot \frac{1}{(y^2+1)^n}\,\mathrm{d}y \\
&\qquad = y \cdot \frac{1}{(y^2+1)^n} + \int y \cdot \frac{1 \cdot 2ny}{(y^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}y \\
&\qquad = \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n\left(\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^n} - \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

$(y^2 = (y^2+1) - 1)$
Auflösen nach $\int \mathrm{d}y/(y^2+1)^{n+1} \quad \rightsquigarrow \quad$ behauptete Identität

Beispiel

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\,\mathrm{d}x$

Formel für Integranden mit mehrfachen komplex konjugierten Polstellen

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{\mathrm{d}x}{q(x)^n}$$

mit $q(x) = (x-a)^2 + b^2$
Einsetzen von $a=0,\ b=3,\ c=2,\ d=1$ und $n=1$ $\quad\rightsquigarrow$

$$-\frac{2}{2(x^2+9)} + \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

Zusammenfassen der ersten beiden Terme und die Formel
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c$ mit $a=0,\ b=3$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(x/3) + c\right)$$

Integration rationaler Funktionen

Durch reelle Partialbruchzerlegung lässt sich eine reelle rationale Funktion als Summe der drei elementaren Grundtypen

$$ax^n\,, \quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,, \quad \frac{c(x-a)+d}{\left((x-a)^2+b^2\right)^n}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ darstellen. Mit Hilfe der Stammfunktionen für diese Grundfunktionen können somit die Stammfunktionen für beliebige rationale Funktionen bestimmt werden.

Beispiel

Berechnung von

$$\int r(x)\,\mathrm{d}x, \quad r(x) = \frac{x^5 + 10x^3 + 5x^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9}$$

mit Hilfe von Partialbruchzerlegung

Polynomdivision $\quad \rightsquigarrow$

$$r(x) = x + \frac{2x^3 + 5x^2 + 8x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9}$$

Faktorisierung des Nenners $\quad \rightsquigarrow$

$$x^4 + 8x^2 - 9 = (x+1)(x-1)(x^2+9)$$

Ansatz

$$r(x) - x = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx}{x^2+9} + \frac{d}{x^2+9}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$\begin{aligned} &2x^3 + 5x^2 + 8x + 25 = \\ &\qquad a(x-1)(x^2+9) + b(x+1)(x^2+9) + (cx+d)(x^2-1) \end{aligned}$$

Koeffizienten-Vergleich $\quad\Longrightarrow\quad a = -1,\ b = 2,\ c = 1$ und $d = 2$
Stammfunktionen der Grundfunktionen $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9} = \\ &\qquad \int x\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \int \frac{2\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+9} + \int \frac{2\mathrm{d}x}{x^2+9} = \\ &\qquad \frac{1}{2}x^2 - \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c \end{aligned}$$

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

Aus

$$\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z}\,,$$

folgt für ein komplexwertiges trigonometrisches Polynom p

$$\int \underbrace{\sum_{|k|\le n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}_{p(x)}\,\mathrm{d}x = c + c_0 x + \sum_{0\neq|k|\le n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0\,.$$

Mit Hilfe der Formeln von Euler-Moivre,

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}, \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\,,$$

können auf diese Weise auch beliebige Polynome in $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ integriert werden.

Beispiel

Berechnung von $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin^4 x}_{p(x)} = \,\mathrm{d}x$

(i) Komplexe Methode:
Formel von Euler-Moivre, binomische Formel $\quad\rightsquigarrow\quad$ Integrand

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)\right)^4 &= \frac{1}{(2\mathrm{i})^4}\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\mathrm{e}^{(4-k)\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-k\mathrm{i}x} \\
&= \frac{1}{16}\underbrace{\binom{4}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}_{\text{Term für } k=2} + \frac{1}{16}\sum_{\ell\neq 0} c_\ell e^{\mathrm{i}\ell x} \\
&= \frac{6}{16} + \frac{1}{16}\sum_{\ell\neq 0} c_\ell e^{\mathrm{i}\ell x}
\end{aligned}
$$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_\ell c_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell x}\,\mathrm{d}x = 2\pi c_0 \quad\rightsquigarrow\quad$ Integral $2\pi\cdot 6/16 = 3\pi/4$

(ii) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin x \sin^3 x \,\mathrm{d}x \\ &= (-\cos x)\sin^3 x - 3\int(-\cos x)(\sin^2 x)\cos x \,\mathrm{d}x \\ &\underset{*}{=} -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x - 3\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

(*) $\quad -\cos x \sin^2 x \cos x = -\cos^2 x \sin^2 x = -(1-\sin^2 x)\sin^2 x$

Auflösen nach $\int \sin^4 \quad \rightsquigarrow$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[-\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = 0 + 3\pi/4$$

Trigonometrische Substitutionen

Mit Hilfe der folgenden Substitutionen lassen sich eine Reihe von elementaren algebraischen Integranden explizit berechnen:

$$
\begin{array}{lll}
x = a\sin t: & \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t & \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \\
x = a\tan t: & \mathrm{d}x = a/\cos^2 t\,\mathrm{d}t & \sqrt{a^2 + x^2} = a/\cos t \\
x = a/\cos t: & \mathrm{d}x = a\sin t/\cos^2 t\,\mathrm{d}t & \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t
\end{array}
$$

Gegebenenfalls müssen die Argumente der Wurzel zunächst durch quadratische Ergänzung auf Standardform gebracht werden.

Beispiel

Alternative Berechnungsmethoden für $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

(i) Trigonometrische Substitution:

$$x = \sin t,\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad x = 0 \to t = 0,\ x = 1/2 \to t = \pi/6$$

$\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, $\cos^2 t = (1+\cos(2t))/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \Big[\underbrace{\frac{1}{2}(t+\sin(2t)/2)}_{G(t)}\Big]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Rücktransformation von $G(t)$, $\sin(2t)/2 = \sin t\cos t = \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$
$\rightsquigarrow$ Stammfunktion

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c$$

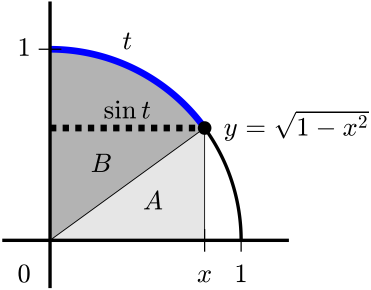
(ii) Geometrisches Argument:
Fläche unter dem Graph von $f(x) = \sqrt{1-x^2}$: Summe der Teilflächen A und B

- Dreieck

$$\text{area}\, A = x\sqrt{1-x^2}/2$$

- Kreissektor mit Öffnungswinkel t ($x = \sin t$)

$$\text{area}\, B = t/2 = \frac{1}{2}\arcsin x$$



$\rightsquigarrow$ gleiche Stammfunktion $F(x) = \text{area}\, A + \text{area}\, B$

Beispiel

Integration von $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$

(i) Unbestimmtes Integral $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$:

trigonometrische Substitution $x = \tan t$, $\mathrm{d}x = 1/\cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}t/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c$$

benutzt: $\sqrt{1+x^2} = 1/\cos t$, (*) Formel für die Stammfunktion von $1/\sin$

Rücksubstitution $\quad\Longrightarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan((\arctan x)/2)| + c$$

(*) Verifikation durch Differentiation:

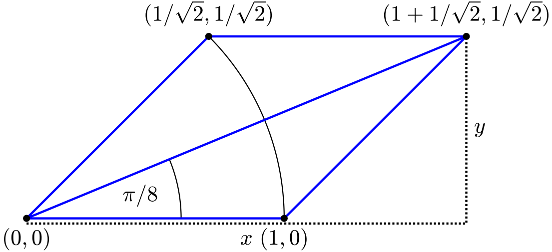
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\ln|y| = 1/y$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan z = 1/\cos^2 z \quad \Longrightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln|\tan(t/2)| = \frac{1}{\tan(t/2)}\frac{1/2}{\cos^2(t/2)} = \frac{1}{2\sin(t/2)\cos(t/2)} = \frac{1}{\sin t} \quad \checkmark$$

(ii) Bestimmtes Integral $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$:
Verwendung der berechneten Stammfunktion $\quad\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
[\ln|\tan((\arctan x)/2)|]_{x=1}^{x=\sqrt{3}} &= \ln|\tan(\pi/6)| - \ln|\tan(\pi/8)| \\
&= \ln|1/\sqrt{3}| - \ln|1/(1+\sqrt{2})| = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}
$$

Berechnung von $\tan(\pi/8)$ mit Hilfe der Diagonale einer Raute mit spitzem Winkel $\pi/4$



$$\Longrightarrow \qquad \tan(\pi/8) = y/x = (1/\sqrt{2})/(1/\sqrt{2}+1) = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Beispiel

Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{x^2-1}/x^3$, $x \geq 1$

(i) Trigonometrische Substitution $x = 1/\cos t$, $0 \leq t < \pi/2$:

$$t = \arccos(1/x), \quad \mathrm{d}x = \sin t/\cos^2 t \, \mathrm{d}t, \quad \sqrt{x^2-1} = \tan t$$

Einsetzen in das Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^{-3}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \cos^3 t \,\tan t \,\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \sin^2 t \,\mathrm{d}t$$

Stammfunktion von $\sin^2 t$: $(t - \cos t \sin t)/2$ (Überprüfung durch Differenzieren) $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} F(x) &= (t - \cos t \underbrace{\sin t}_{\sqrt{1-\cos^2 t}})/2 = \left(\arccos(1/x) - (1/x)\sqrt{1-1/x^2}\right)/2 \\ &= \frac{1}{2}\arccos(1/x) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}/x^2 \end{aligned}$$

(ii) Bestimmtes Integral $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1}/x^3\,\mathrm{d}x$:
Einsetzen in die Stammfunktion $\quad\rightsquigarrow$

$$\left[\frac{1}{2}\arccos(1/x) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}/x^2\right]_{x=1}^{x=\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\arccos(1/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\sqrt{2-1}/2\right) - \left(\frac{1}{2}\arccos 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-1}/2\right)$$

$$(\pi/8 - 1/4) - (0-0) = (\pi-2)/8$$

Rationale Funktionen von Sinus und Kosinus

Mit der Substitution

$$x = \tan(t/2), \quad -\pi < t < \pi$$

erhält man für eine beliebige rationale Funktion r

$$\int r(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

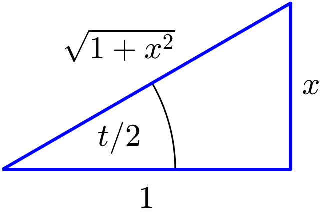
Damit lässt sich ein trigonometrischer in einen rationalen Integranden überführen, der mit Partialbruchzerlegung berechnet werden kann.

Beweis

Satz des Pythagoras $\rightsquigarrow$

$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}$

$\sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$



$(\mathrm{d}/\mathrm{d}u)\tan u = 1/\cos^2 u \quad \Longrightarrow$

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\,\mathrm{d}t$$

und Anwendung der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\cos t &= \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,\\ \sin t &= 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}\end{aligned}$$

Beispiel

Umwandlung von $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$, $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ in rationale Integrale

Substitution $x = \tan(t/2)$, $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x/(1+x^2)$, $\sin t = 2x/(1+x^2)$ $\rightsquigarrow$

$$\int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c = \ln|\tan(t/2)| + c$$

analog: $\cos t = (1-x^2)/(1+x^2)$, Partialbruchzerlegung $\rightsquigarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

Rücksubstitution $\rightsquigarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c$$

Beispiel

Stammfunktion von $f(t) = \dfrac{1}{1 + \sin t - \cos t}$

(i) Trigonometrische Substitution:
$x = \tan(t/2)$, $\mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x/(1+x^2)$, $\sin t = 2x/(1+x^2)$,
$\cos t = (1-x^2)/(1+x^2) \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\mathrm{d}t &= \int \frac{1}{1 + 2x/(1+x^2) - (1-x^2)/(1+x^2)}\,\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(ii) Partialbruchzerlegung:
Ansatz

$$r(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

$*x$ und $x = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1$
$*(x+1)$ und $x = -1 \quad \Longrightarrow \quad b = 1$

(iii) Bilden der Stammfunktionen:
$r(x) = 1/x - 1/(x+1) \quad \rightsquigarrow$

$$R(x) = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$$

Rücktransformation $(x = \tan(t/2),\, 1/x = \cot(t/2)) \quad \rightsquigarrow$

$$F(t) = \ln\left|\frac{\tan(t/2)}{\tan(t/2)+1}\right| = \ln\left|\frac{1}{1+\cot(t/2)}\right|$$

Für eine auf $[a, b)$ stückweise stetige Funktion f wird durch

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f$$

der Integralbegriff auf unendliche Intervalle ($b = \infty$) und unbeschränkte Integranden ($f(b) = \pm\infty$) erweitert.

Analog wird eine Singularität an der unteren oder an beiden Grenzen behandelt. Im letzteren Fall muss der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Folgen $c \to a^+$, $d \to b^-$ sein.

Hinreichend für die Existenz eines uneigentlichen Integrals ist die absolute Intergrierbarkeit von f, d. h.

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{const}$$

für alle Teilintervalle $[c, d] \subset (a, b)$.

Beispiel

Berechnung des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{x=0}^{x=b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-b}+1\right) = 1$$

direkte Verwendung uneigentlicher Grenzen bei elementaren Grenzwerten:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_{x=0}^{x=\infty} = 0-(-1) = 1$$

Beispiel

Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^r}\,\mathrm{d}x, \quad r \in \mathbb{R}\backslash 0$$

Substitution $y = \ln x$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/x$, $\quad x = 2 \mapsto y = \ln 2$, $x = \infty \mapsto y = \infty$
$\rightsquigarrow$

$$\int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{y^r}\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \left[\dfrac{(\ln y)^{1-r}}{1-r}\right]_{y=\ln 2}^{y=\ln b} = \dfrac{(\ln b)^{1-r} - (\ln 2)^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ [\ln y]_{y=\ln 2}^{y=\ln b} = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\,, & r = 1 \end{cases}$$

Grenzwert für $b \to \infty$ existiert genau dann wenn $r > 1$:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^r}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln 2)^{1-r}}{r-1}$$

Beispiel

Berechnung des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$$

Singularität bei $x = \pi/2 \quad \rightsquigarrow \quad$ betrachte obere Grenze $b < \pi/2$
Substitution $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x\,\mathrm{d}x$, $x = 0 \mapsto y = 1$,
$x = b \mapsto y = \cos b \quad \rightsquigarrow$

$$\int_1^{\cos b} y^{-1/2}\,(-\mathrm{d}y) = \left[-2y^{1/2}\right]_{y=1}^{y=\cos b} = -2\sqrt{\cos b} + 2$$

Grenzwert

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\pi/2} \int_0^{b} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\pi/2} \left(-2\sqrt{\cos b} + 2\right) = 2$$

Beispiel

Analyse des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Stammfunktion des Integranden: $\arctan(x) + \ln(1+x^2)$

(i) Falsche Berechnung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{x=-b}^{x=b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi
\end{aligned}$$

$(\arctan(-b) = -\arctan(b)$, $\ln(1+b^2) = \ln(1+(-b)^2))$

(ii) Korrekte Argumentation:
unabhängige Betrachtung der unteren und oberen Grenze

$$\begin{aligned}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\arctan x + \ln(1+x^2)\right]_{x=c}^{x=0} \\ &= (\arctan 0 + \ln 1) - (\arctan c + \ln(1+c^2)) \\ &= -\arctan(c) - \ln(1+c^2)\end{aligned}$$

$$\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(d) + \ln(1+d^2)$$

$c \to -\infty$, $d \to \infty$
$\implies$ keine endlichen Grenzwerte in beiden Fällen
$\implies$ Divergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

Ist g eine Majorante für f, d.h. gilt

$$|f(x)| \leq |g(x)| \qquad a < x < b$$

so folgt aus der absoluten Integrierbarkeit von g die absolute Integrierbarkeit von f über dem Intervall $[a, b]$ und damit die Existenz des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Beweis

betrachte o.B.d.A. eine Singularität an der oberen Grenze:
$\int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f$

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

monoton wachsend, beschränkt durch $\int_a^b |g|$
$\implies$ Konvergenz für $c \to b^-$ und Existenz von $\int_a^b |f|$

$$s(c) = \int_a^c (\underbrace{f + |f|}_{\geq 0})$$

ebenfalls monoton wachsend, beschränkt durch $2 \int_a^b |g|$
$\implies$ Existenz von $\int_a^b (f + |f|)$
Subtraktion $\implies$ Existenz von

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f|$$

Beispiel

Vergleichsfunktion $f(x) = x^r$

$$\int_a^b x^r \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b) - \ln(a), & r = -1 \end{cases}, \quad 0 < a < b < \infty$$

(i) $b \to \infty$:
Konvergenz für $r < -1 \quad \rightsquigarrow \quad$ Existenz von

$$\int_1^\infty x^r \,\mathrm{d}x, \quad r < -1, \quad \text{Grenzwert} : -\frac{1}{r+1}$$

(ii) $a \to 0^+$:
Konvergenz für $r > -1 \quad \rightsquigarrow \quad$ Existenz von

$$\int_0^1 x^r \,\mathrm{d}x, \quad r > -1, \quad \text{Grenzwert} : \frac{1}{r+1}$$

Beispiel

Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^\infty (\sin x)/x \, \mathrm{d}x$

Aufspaltung in zwei Anteile: $\int_0^\infty \ldots = \int_0^1 \ldots + \int_1^\infty \ldots$
Existenz des Integrals über $[0,1]$ wegen Stetigkeit des Integranden
Umformung des Integrals über $[1,\infty]$ mit partieller Integration

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

erster Term $\to \cos(1)$ für $b \to \infty$
zweiter Term: Integrand majorisiert durch

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \le \left| \frac{1}{x^2} \right|$$

$\Longrightarrow$ Konvergenz nach dem Vergleichskriterium

Methoden der Fourier-Analysis $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

Gamma-Funktion

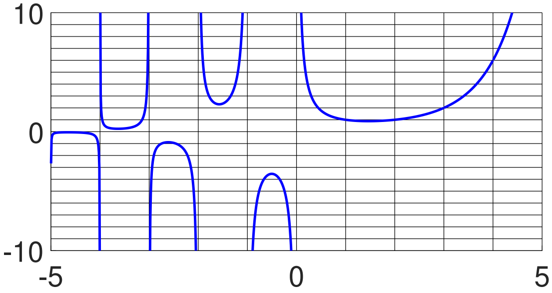
Die durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t, \quad x \in (0, \infty),$$

definierte Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Insbesondere ist $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.



Mit Hilfe der Funktionalgleichung lässt sich die Gamma-Funktion auch für negative Argumente definieren. Wie aus dem abgebildeten Funktionengraphen ersichtlich ist, besitzt sie einfache Pole für $x = 0, -1, \ldots$.

Eine alternative Definition der Gamma-Funktion wurde von Gauß gegeben:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,.$$

Diese Identität ermöglicht ebenfalls die Berechnung von Γ für negative Argumente.

Beweis

(i) Existenz des Integrals:

Konvergenz von $\int_0^1 f$ nach dem Vergleichskriterium ($x > 0$)

$$f(x) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq t^{x-1}$$

Konvergenz von $\int_1^\infty f$ ebenfalls nach dem Vergleichskriterium

$$f(x) \leq t^{-2} \quad \Longleftrightarrow \quad t^{x+1} \leq \mathrm{e}^t$$

erfüllt für $t \geq n!$ mit $n \geq x + 2$

Begründung mit Reihendarstellung der Exponentialfunktion:

$t^{x+1} \leq t^{n-1} \leq t^n/n! \leq \mathrm{e}^t$

(ii) Funktionalgleichung:

partielle Integration $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)\end{aligned}$$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}$