Hauptsatz der Integralrechnung

Ist F eine Stammfunktion einer stetigen Funktion f, d.h. $f = F'$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

bzw. in Kurzschreibweise

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

Ein bestimmtes Integral lässt sich also als Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion an den Intervallendpunkten berechnen.

Beweis

betrachte beide Seiten der zu beweisenden Identität

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

als Funktion von b

Übereinstimmung für $b = a$ (beide Seiten Null)

$\rightsquigarrow$ genügt Gleichheit der Ableitungen zu zeigen

Ableitung der linken Seite

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f$$

Mittelwertsatz $\implies$

$$\int_b^{b+h} f = (b+h-b)\,f(c) = h\,f(c)$$

mit $c \in (b, b+h)$

$f(c) \to f(b) \implies$ Ableitung der linken Seite gleich $f(b)$

gleicher Wert für die Ableitung der rechten Seite ($F' = f$)

Beispiel

Integration von Polynomen, illustriert für $p(x) = x^2 - 4x + 3$

(i) Stammfunktion und bestimmtes Integral:
$\int x^k \, \mathrm{d}x = x^{k+1}/(k+1) + c \qquad \Longrightarrow$

$$\int p(x) \, \mathrm{d}x = \int x^2 - 4x + 3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 4\,\frac{x^2}{2} + 3x \, + \, c \,,$$

d.h. $P(x) = x^3/3 - 2x^2 + 3x$,

Bestimmtes Integral, beispielsweise über das Intervall $[-1, 2]$:

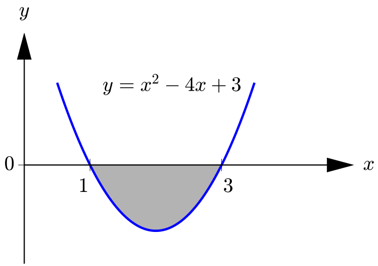
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} x^2 - 4x + 3 \, \mathrm{d}x &= [x^3/3 - 2x^2 + 3x]_{x=-1}^{x=2} \\ &= (8/3 - 8 + 6) - (-1/3 - 2 - 3) = 6 \end{aligned}$$

(ii) Fläche, eingeschlossen mit der x-Achse:

Nullstellen x_k $\rightsquigarrow$ Randpunkte
Formel für die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ $\Longrightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{(4/2)^2 - 3} = 2 \pm 1\,,$$

d.h. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$



Berechnung der Fläche als bestimmtes Integral (negatives Vorzeichen des Integrals, da der Funktionsgraph im relevanten Intervall $[x_1, x_2]$ unterhalb der x-Achse liegt) $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} -\int_1^3 x^2 - 4x + 3\,\mathrm{d}x &= -[x^3/3 - 2x^2 + 3x]_{x=1}^{x=3} \\ &= -(3^3/3 - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3) + (1/3 - 2 + 3) \\ &= -0 + 4/3 = 4/3 \end{aligned}$$

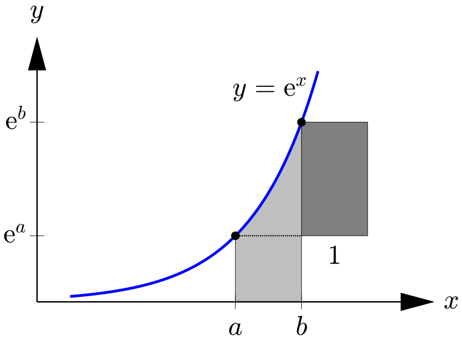
Integration der Exponential-Funktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\exp x}_{f(x)} = \exp x$$

$\rightsquigarrow$ Stammfunktion $F(x) = \exp x$

und

$$\int_a^b \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{x=a}^{x=b} = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$$



Die Fläche unter dem Graph zwischen a und b entspricht einem Rechteck mit Breite 1 und dem Abstand der Funktionswerte als Höhe.

Beispiel

Integration von $f(x) = 1/(1+x^2)$ und $g(x) = \tan x$

Stammfunktionen

$$F(x) = \arctan x + c, \quad G(x) = -\ln(\cos x),\ |x| < \pi/2$$

Anwendung des Hauptsatzes $\int_a^b f = [F]_a^b$ für konkrete Intervalle $[a, b]$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad = \quad [\arctan]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \,\mathrm{d}x \quad = \quad -\left[\ln(\cos x)\right]_{x=0}^{x=\pi/4} = -\ln(1/\sqrt{2}) + \ln(1) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Beispiel

Kraft auf einen Körper der Masse m im Gravitationsfeld eines Planeten mit Masse M:

$$f(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$$

mit γ der Gravitationskonstante und x dem Abstand der Schwerpunkte

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\gamma \frac{mM}{x}}_{F(x)} + c$$

Arbeit bei Bewegung vom Abstand $x = a$ zum Abstand $x = b$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\gamma \frac{mM}{x}\right]_{x=a}^{x=b} = \gamma m M \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

a: Radius r des Planeten, $b \to \infty$ und Gleichsetzen mit der kinetischen Energie $\quad\rightsquigarrow\quad$ Fluchtgeschwindigkeit:

$$\frac{m}{2} v^2 = \gamma \frac{mM}{r} \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\gamma 2M/r}$$

$v_{\text{Erde}} = 11.2\,\text{km/s}$