## Gamma-Funktion

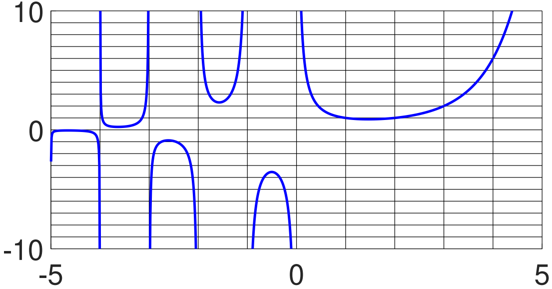
Die durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t, \quad x \in (0, \infty)\,,$$

definierte Gamma-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

Insbesondere ist $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.



Mit Hilfe der Funktionalgleichung lässt sich die Gamma-Funktion auch für negative Argumente definieren. Wie aus dem abgebildeten Funktionengraphen ersichtlich ist, besitzt sie einfache Pole für $x = 0, -1, \ldots$.

Eine alternative Definition der Gamma-Funktion wurde von Gauß gegeben:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \,.$$

Diese Identität ermöglicht ebenfalls die Berechnung von $\Gamma$ für negative Argumente.

## Beweis

(i) Existenz des Integrals:

Konvergenz von $\int_0^1 f$ nach dem Vergleichskriterium $(x > 0)$

$$f(x) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq t^{x-1}$$

Konvergenz von $\int_1^\infty f$ ebenfalls nach dem Vergleichskriterium

$$f(x) \leq t^{-2} \quad \iff \quad t^{x+1} \leq \mathrm{e}^t$$

erfüllt für $t \geq n!$ mit $n \geq x+2$

Begründung mit Reihendarstellung der Exponentialfunktion:

$t^{x+1} \leq t^{n-1} \leq t^n/n! \leq \mathrm{e}^t$

(ii) Funktionalgleichung:

partielle Integration $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)\end{aligned}$$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} = 1 \quad \implies \quad \Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}$