Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polstellen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int (x-a)^{-n-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

Bei mehrfachen komplex konjugierten Polstellen $a \pm \mathrm{i}b$ mit dem entsprechenden quadratischen Faktor $q(x) = (x-a)^2 + b^2$ gilt

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(x-a)}{2b^2 n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2 n}\int \frac{\mathrm{d}x}{q(x)^n}\,.$$

Die Reduktion des Exponenten von q $(n+1 \to n)$ ermöglicht eine rekursive Berechnung der Stammfunktion.

Beweis

(i) Reelle Polstelle:
Substitution $y = x - a$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \quad \rightsquigarrow$

$$\int (x-a)^{-n-1}\,\mathrm{d}x = \int y^{-n-1}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{n}y^{-n} + c$$

(ii) Komplex konjugierte Polstellen, erster Term:
Substitution $y = (x-a)^2 + b^2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y/(2(x-a)) \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \frac{c}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^{n+1}} = -\frac{c}{2ny^n} \\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n}\end{aligned}$$

(iii) Komplex konjugierte Polstellen, zweiter Term:
zu zeigen

$$\int \frac{d\,\mathrm{d}x}{q(x)^{n+1}} = \frac{d(x-a)}{2b^2 n q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2 n} \int \frac{\mathrm{d}x}{q(x)^n}$$

mit $q(x) = (x-a)^2 + b^2$
Division durch d und Substitution $y = (x-a)/b$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/b$ $\quad\rightsquigarrow$
äquivalente Identität

$$\int \frac{b\,\mathrm{d}y}{(b^2y^2+b^2)^{n+1}} = \frac{by}{2b^2 n(b^2y^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2 n} \int \frac{b\,\mathrm{d}y}{(b^2y^2+b^2)^n}$$

bzw. nach Multiplikation mit b^{2n+1}

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^{n+1}} = \frac{y}{2n(y^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^n}$$

Beweis durch partielle Integration des letzten Terms:

$$\begin{aligned}
&\int 1 \cdot \frac{1}{(y^2+1)^n}\,\mathrm{d}y \\
&\quad = y \cdot \frac{1}{(y^2+1)^n} + \int y \cdot \frac{1 \cdot 2ny}{(y^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}y \\
&\quad = \frac{y}{(y^2+1)^n} + 2n\left(\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^n} - \int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

$(y^2 = (y^2+1) - 1)$
Auflösen nach $\int \mathrm{d}y/(y^2+1)^{n+1} \quad \rightsquigarrow \quad$ behauptete Identität

Beispiel

Berechnung von $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\,\mathrm{d}x$

Formel für Integranden mit mehrfachen komplex konjugierten Polstellen

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = -\frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{\mathrm{d}x}{q(x)^n}$$

mit $q(x) = (x-a)^2 + b^2$
Einsetzen von $a = 0,\ b = 3,\ c = 2,\ d = 1$ und $n = 1$ $\quad\rightsquigarrow$

$$-\frac{2}{2(x^2+9)} + \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$$

Zusammenfassen der ersten beiden Terme und die Formel
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c$ mit $a = 0,\ b = 3$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(x/3) + c\right)$$