Elementare rationale Integranden

Die Stammfunktionen der drei Grundtypen rationaler Funktionen sind

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} &= \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + c \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c \\
\int \frac{(x-a)\,\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + c
\end{aligned}$$

Beweis

Überprüfung der Stammfunktionen durch Differenzieren

alternativ: Umformung der Integranden

(i) $\int \mathrm{d}y/y = \ln|y| + c \quad \Longrightarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + c$$

(ii) Umformung $\quad \rightsquigarrow$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{((x-a)/b)^2+1}$$

Substitution $y = (x-a)/b$, $\mathrm{d}x = b\,\mathrm{d}y \quad \rightsquigarrow$

$$\frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c$$

(iii) Substitution $y = (x-a)^2 + b^2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y/(2(x-a))$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-a)\,\mathrm{d}x}{(x-a)^2+b^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + c \\ &= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + c \end{aligned}$$

Beispiel

Flächen begrenzt durch rationale Funktionsgraphen

(i) $\quad r(x) = \dfrac{2-x}{1+x}$:

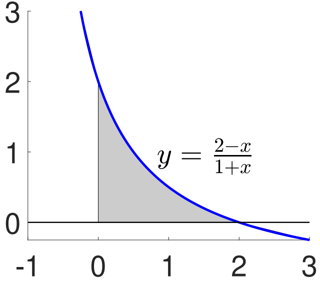
Umformung $\quad\rightsquigarrow\quad r(x) = \dfrac{-1-x}{1+x} + \dfrac{3}{1+x} = -1 + \dfrac{3}{1+x}$

Summe der Stammfunktionen der elementaren Ausdrücke $\quad\rightsquigarrow\quad$ Stammfunktion

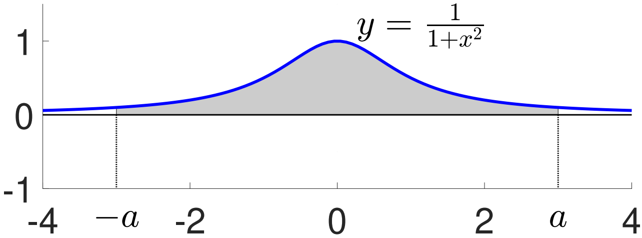
$$R(x) = -x + 3\ln|1+x|$$

$r(2) = 0 \quad\rightsquigarrow\quad$ Flächeninhalt

$$\begin{aligned}\int_0^2 r(x)\,\mathrm{d}x &= [R(x)]_{x=0}^{x=2} \\ &= (-2 + 3\ln 3) - (-0 + 3\ln 1) \\ &= -2 + 3\ln 3\end{aligned}$$



(ii) $r(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$:



Flächeninhalt: Grenzwert der Flächeninhalte von $\{(x,y) : \, 0 \le y \le r(x), \, -a \le x \le a\}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{a\to\infty} (\arctan a - \arctan(-a)) \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}
$$

Beispiel

Berechnung der Stammfunktion von

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

quadratische Ergänzung des Nenners

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)$$

Anpassung des Zählers

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)$$

$\rightsquigarrow$ Zerlegung in Standardausdrücke:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}$$

Stammfunktionen der elementaren Integranden $\rightsquigarrow$

$$\int r(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{9}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

Berechnung eines bestimmten Integrals durch Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion
z.B.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 r(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{4}\,\left[\ln((x-1)^2+4)\right]_{x=1}^{x=3} + \frac{9}{4}\,\left[\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]_{x=1}^{x=3} \\
&= \frac{3}{4}\,(\ln 8 - \ln 4) + \frac{9}{4}\,(\arctan 1 - \arctan 0) \\
&= \frac{3}{4}\,\ln 2 + \frac{9}{16}\,\pi
\end{aligned}$$