Delta-Funktion

Die Diracsche Delta-Funktion δ ist durch

$$\int_{\mathbb{R}} \delta f = f(0)$$

definiert, wobei f eine beliebige stetige Funktion ist, die ausserhalb eines Intervalls (a, b) verschwindet.

Mit Hilfe von partieller Integration oder über einen Grenzwertprozess kann δ als verallgemeinerte Ableitung der Heavisideschen Sprungfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

interpretiert werden.

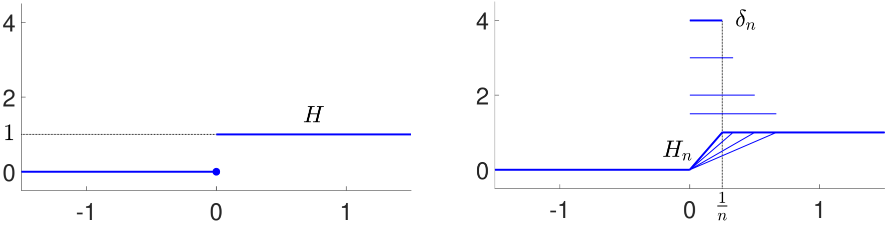
Beweis

(i) Begründung mit Hilfe von partieller Integration:

$0 \in (a,b),\ f(a) = 0 = f(b) \quad \Longrightarrow$

$$\int_a^b H'f = \underbrace{[Hf]_a^b}_{=0} - \int_a^b Hf' = -\int_0^b f' = -[f]_0^b = f(0)$$

f beliebig $\quad \rightsquigarrow \quad \int H'f = \int \delta f$



Heaviside-Funktion H Näherungen H_n, $\delta_n = H_n'$

(ii) Begründung mit Hilfe eines Grenzwertprozesses:

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n)$$

für ein $t_n \in [0, 1/n]$ aufgrund des Mittelwertsatzes
Stetigkeit von $f \quad \Longrightarrow \quad f(t_n) \to f(0)$