Zyklische Gleichungssysteme

Eine zyklische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_n^{-kj}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)\,,$$

und kann durch die Fourier-Matrix, deren Spalten Eigenvektoren von A sind, diagonalisiert werden:

$$\tfrac{1}{n} W_n^* A W_n = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda = W_n^* a\,.$$

Zyklische Gleichungssystems $Ax = b$ lassen sich somit mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation lösen:

$$x = W_n \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{-1}(W_n^* b/n) \,.$$

Für $n = 2^\ell$ ist die schnelle Fourier-Transformation anwendbar, und man erhält den folgenden Lösungsalgorithmus:

$c = \mathrm{IFFT}(b)$
$\lambda = n\ \mathrm{IFFT}(a)$
$y_j = c_j/\lambda_j\,, \quad j = 0, \ldots, n-1$
$x = \mathrm{FFT}(y)\,.$

Beispiel:

zyklisches Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -12 & -4 & 8 & 4 \\ 4 & -12 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & -12 & -4 \\ -4 & 8 & 4 & -12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$n = 4,\ a = (-12, 4, 8, -4)^{\mathrm{t}} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} c &= \mathrm{IFFT}(b) = (0, 3 + 7\mathrm{i}, 6, 3 - 7\mathrm{i})^{\mathrm{t}} \\ \lambda &= 4\ \mathrm{IFFT}(a) = (-4, -20 - 8\mathrm{i}, -4, -20 + 8\mathrm{i})^{\mathrm{t}} \\ y &= c\,./\,\lambda = \left(0, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{i}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{t}} \\ x &= \mathrm{FFT}(y) = (-2, 2, -1, 1)^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$